

X-96-0689396  
HB141.C37 1997

RESERVADO



# UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

**MESTRADO EM: Actuariado e Gestão de Riscos Financeiros**

Um Algoritmo Recursivo para o Cálculo da  
Distribuição do Tempo de Ruína

Rui Manuel Rodrigues Cardoso

**Orientação:** Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

**Júri:**

**Presidente:** Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

**Vogais:** Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Outubro de 1997



# Resumo

Para o cálculo aproximado de probabilidades de ruína em horizonte finito, no modelo clássico de risco, De Vylder e Goovaerts (1988) e Dickson e Waters (1991) apresentaram algoritmos recursivos em tempo discreto, usando uma determinada re-parametrização de um processo de Poisson. Verifica-se que dos dois, o último é o mais rápido, mas é instável e, além disso, não será o método mais adequado para o cálculo directo da distribuição (imprópria) da variável aleatória Tempo de Ruína. Tendo por base estes dois métodos apresentamos um novo algoritmo recursivo que permite obter directamente, de forma aproximada, a densidade e a distribuição do Tempo de Ruína. Com o nosso método, além de obtermos valores iguais ao de Dickson e Waters (1991), ele parece ser estável e revela-se, atendendo ao objectivo pretendido, mais rápido que os métodos citados. Quanto aos gráficos obtidos para a densidade do Tempo de Ruína, verificamos que, para os casos apresentados, esta é uma função decrescente para baixos valores da reserva inicial (incluindo  $u = 0$ ). No entanto, para valores mais elevados de  $u$ , a densidade atinge uma moda para valores positivos de  $t$ . Este algoritmo é também aplicado, com as devidas alterações, no cálculo de valores aproximados da probabilidade de ruína na presença de uma barreira superior absorvente.

**Palavras-chave:** probabilidade de ruína; horizonte finito; Tempo de Ruína; modelo em tempo discreto; cálculo recursivo; cadeias de Markov.

# Abstract

De Vylder and Goovaerts (1988) and Dickson and Waters (1991) introduced two different discrete time algorithms for the approximation of finite time ruin probabilities in the classical risk process model. Both using some sort of re-parametrization of the Poisson Process. The latter showed to be faster, however unstable. Besides, it does not appear to be the appropriate procedure if we are interested on the computation of the (defective) distribution of the Time to Ruin random variable. Based on these methods we introduce a different recursive procedure which allow us to compute directly the approximate density and distribution functions of the Time to Ruin. We get the same figures as the Dickson and Waters' (1991), seems to be stable and faster. We show some graphs for the density of the Time to Ruin, and for the different cases this density is a decreasing function for very low values of the initial surplus ( $u = 0$  included). Its shape changes for higher values of  $u$  having a mode for positive values of  $t$ . The same algorithm is used for the calculation of (approximate) finite time ruin probabilities in the presence of an upper absorbing barrier.

**Keywords:** probability of ruin; finite time; Time to Ruin; discrete model; recursive calculation; Markov chains.



# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>9</b>
<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 O modelo clássico de risco</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.2 O modelo de Poisson em tempo contínuo . . . . .	14
1.2.1 Hipóteses do modelo . . . . .	14
1.2.2 O processo de reserva e as probabilidades de ruína . . . . .	15
1.3 O modelo de Poisson em tempo discreto . . . . .	17
1.3.1 Hipóteses do modelo . . . . .	17

<i>Índice</i>	4
1.3.2 O processo de reserva em tempo discreto . . . . .	17
1.3.3 A distribuição de Poisson composta . . . . .	18
1.3.4 A ruína em tempo discreto . . . . .	21
<b>2 Os algoritmos de De Vylder e Goovaerts e de Dickson e Waters</b>	<b>22</b>
2.1 Introdução . . . . .	22
2.2 O algoritmo de De Vylder e Goovaerts . . . . .	23
2.3 O algoritmo de Dickson e Waters . . . . .	27
2.3.1 Em horizonte finito . . . . .	27
2.3.2 Em horizonte infinito . . . . .	32
2.4 Alteração ao algoritmo de De Vylder e Goovaerts . . . . .	33
<b>3 O novo algoritmo recursivo</b>	<b>35</b>
3.1 Introdução . . . . .	35
3.2 Algumas noções sobre cadeias de Markov . . . . .	36
3.3 Análise do processo de reserva em tempo discreto . . . . .	39
3.4 O algoritmo . . . . .	44

Índice	5
3.5 Exemplos numéricos . . . . .	48
<b>4 Probabilidades de ruína com barreira superior absorvente</b>	<b>63</b>
4.1 Introdução . . . . .	63
4.2 Em tempo discreto e horizonte finito . . . . .	64
4.3 Exemplos numéricos . . . . .	66
<b>Conclusão</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>75</b>



# Lista de Figuras

2.1	Combinações de $\omega$ e $\tau$ dos valores $\psi_d(\omega, \tau)$ necessários para o cálculo de $\psi_d(u, t)$ . . . . .	25
2.2	Combinações de $\omega$ e $\tau$ dos valores $\delta_d(\omega, \tau)$ necessários para o cálculo de $\delta_d(u, t)$ . . . . .	29
3.1	Valores positivos que $U_d(t)$ pode tomar . . . . .	40
3.2	Valores que $U_d(n)$ pode tomar, supondo que $U_d(n - 1) = x$ . . . .	42
3.3	Densidade do Tempo de Ruína. Para $u = 0, 2, 4$ . Exponencial(1) .	55
3.4	Densidade do Tempo de Ruína. Para $u = 5, 10, 15, 20$ . Exponencial(1) . . . . .	56
3.5	Densidade do Tempo de Ruína. Para $u = 0, 2, 4$ . Gama(2,2) . . .	57
3.6	Densidade do Tempo de Ruína. Para $u = 5, 10, 15, 20$ . Gama(2,2)	58

3.7 Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Gama(3,3) . . . 59

3.8 Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Gama(3,3) 60

3.9 Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Pareto(2,1) . . . 61

3.10 Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Pareto(2,1) 62

4.1  $\phi(5, t)$  e  $\chi(5, 10, t)$ . Exponencial(1) . . . . . 69

4.2  $\phi(10, t)$  e  $\chi(10, 15, t)$ . Exponencial(1) . . . . . 70

4.3  $\phi(15, t)$  e  $\chi(15, 20, t)$ . Exponencial(1) . . . . . 71

4.4  $\phi(20, t)$  e  $\chi(20, 30, t)$ . Exponencial(1) . . . . . 72

# Lista de Quadros

3.1	$\psi(u, t)$ . Exponencial(1) . . . . .	51
3.2	$\psi(u, t)$ . Gama(2,2) . . . . .	53
3.3	$\psi(u, t)$ . Gama(3,3) . . . . .	53
3.4	$\psi(u, t)$ . Pareto(2,1) . . . . .	54
4.1	$\psi(u, t)$ e $\xi(u, k, t)$ . Exponencial(1) . . . . .	68
5.1	Comparação de tempos de processamento . . . . .	74



# Agradecimentos

Perante mais uma etapa da minha vida, não posso deixar de expressar os meus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis, cuja orientação, ensinamentos e amizade constituíram ponto fulcral na elaboração desta dissertação.

Também quero agradecer à minha família e amigos por todo o apoio e paciência demonstrados ao longo da realização deste trabalho.



# Introdução

À Teoria da Ruína, impõe-se como objectivo, sob o ponto de vista probabilístico, o estudo do comportamento da reserva de risco de uma carteira de seguros num determinado período de tempo.

Diz-se que a ruína ocorre quando essa mesma reserva atinge valores negativos. A probabilidade desse evento é designada, habitualmente, por probabilidade de ruína, funcionando como um indicador importante na actividade seguradora.

Em certos casos, é possível determinar uma expressão explícita para o cálculo desta probabilidade em tempo contínuo e horizonte infinito. Contudo, e de maneira geral, esta tarefa é impossível, nomeadamente em horizonte finito, pelo que se desenvolveram algoritmos para o cálculo aproximado da probabilidade de ruína, dos quais se podem destacar os algoritmos de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Dickson e Waters (1991), intimamente ligados. De entre estes dois algoritmos, o último é mais rápido. No entanto, além de instável, não é o método mais adequado para obter directamente a função de distribuição (imprópria) da variável Tempo de Ruína, pretendendo-se calcular as probabilidades de ruína em tempo

finito para um valor de  $u$  fixo, à partida.

Neste sentido, é propósito deste trabalho, apresentar um algoritmo que permita obter de forma directa a função densidade (aproximada) do Tempo de Ruína. Para tal, consideraram-se os pressupostos que estão na base dos métodos de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Dickson e Waters (1991), recorrendo ainda a alguns aspectos da teoria sobre cadeias de Markov. Faz-se também uma aplicação deste novo algoritmo no cálculo de probabilidades de ruína na presença de uma barreira superior absorvente.

Esta dissertação encontra-se dividida da seguinte forma:

- Capítulo 1- Primeiramente é descrito o modelo clássico de risco, tanto no caso contínuo como no caso discreto, revendo, no essencial, os conceitos, definições e notações normalmente utilizadas, com relevo para o cálculo da distribuição de Poisson composta e para a caracterização do processo de reserva.
- Capítulo 2- São apresentados os algoritmos recursivos, de cálculo de probabilidades de ruína, de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Dickson e Waters (1991), sendo este último também aplicado em horizonte temporal infinito.
- Capítulo 3- Neste capítulo, começa-se por rever algumas noções sobre cadeias de Markov, que irão ser aplicadas na análise do processo de reserva em tempo discreto, após o que, se desenvolve o algoritmo de cálculo de probabilidades de ruína em horizonte finito. São também apresenta-



dos alguns gráficos para a densidade (própria) do Tempo de Ruína considerando várias distribuições para as indemnizações individuais.

Capítulo 4- Finalmente será feita a aplicação do algoritmo elaborado no cálculo de probabilidades de ruína quando se está na presença de uma barreira superior absorvente, sendo também comparadas, graficamente, as densidades (impróprias) do Tempo de Ruína no caso da presença ou não de tal barreira, considerando as indemnizações particulares exponencialmente distribuídas.

# Capítulo 1

## O modelo clássico de risco

### 1.1 Introdução

Neste capítulo é abordado o modelo clássico de risco, quer em tempo contínuo, quer em tempo discreto, considerando várias hipóteses inerentes a cada um dos modelos e que estão na base dos dois métodos de cálculo recursivo de probabilidades de ruína, descritos no Capítulo 2, e do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3. É também apresentada uma forma de cálculo da distribuição de Poisson composta e são definidos o processo de reserva, em tempo contínuo e tempo discreto, tal como as probabilidades de ruína e sobrevivência, quer em horizonte finito como infinito.

## 1.2 O modelo de Poisson em tempo contínuo

### 1.2.1 Hipóteses do modelo

Perante um determinado risco (uma apólice ou um conjunto de apólices), o montante total de indemnizações ocorridas no intervalo de tempo  $[0, t]$ , é representado por um processo estocástico  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , geralmente designado por indemnizações agregadas, sendo:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (1.1)$$

em que

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é também um processo estocástico que representa o número de indemnizações ocorridas no mesmo intervalo de tempo, sendo no modelo clássico um processo de Poisson, com parâmetro  $\lambda t$ ;
- $Y_i$  representa o montante da  $i$ -ésima indemnização individual (ou particular);
- $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  é uma sequência de variáveis aleatórias não negativas i.i.d. e independentes de  $N(t)$ .

Deste modo, a contagem do número de indemnizações é feita a partir do momento 0, isto é,  $N(0) = 0$  e  $S(t) = 0$  enquanto se verificar  $N(t) = 0$ . Supõe-se ainda que as variáveis aleatórias  $Y_i$ , com  $i = 1, 2, \dots$ , são identicamente distribuídas a uma variável aleatória  $Y$ . No modelo clássico,  $S(t)$  é um processo de

Poisson composto. A função de distribuição e a função de densidade de  $S(t)$  serão, respectivamente, designadas por  $F(x, t)$  e  $f(x, t)$ .

### 1.2.2 O processo de reserva e as probabilidades de ruína

Entende-se por reserva de risco de uma seguradora, o valor do montante, que resulta da soma de um fundo inicial (ou reserva inicial) mais os prémios cobrados e menos as indemnizações pagas (ver Bowers *et al.* (1986), p.345), ou seja,

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad (1.2)$$

sendo  $U(t)$  a reserva no instante  $t \geq 0$ , e onde  $U(0) = u \geq 0$  é a reserva inicial e  $c$  (constante positiva) o prémio cobrado por unidade de tempo. Considera-se ainda que

$$c = (1 + \theta)\lambda p_1, \quad (1.3)$$

sendo  $\theta > 0$  a carga de segurança e  $p_1$  o valor médio das indemnizações individuais. Sem perda de generalidade, assumir-se-á  $\lambda = p_1 = 1$ .

É de notar que, neste modelo, se ignoram os juros e outros factores, que além dos prémios e indemnizações, possam afectar a reserva.

Se a reserva é negativa num certo ponto ou pontos do tempo, então diz-se que a ruína ocorreu. Este termo técnico não corresponde à insolvência, mesmo no caso do risco em causa ser toda a carteira da seguradora. No entanto, é um instrumento útil para a medida do risco financeiro de uma seguradora por consequência da variação da reserva.

O momento em que a ruína ocorre é designado por  $T$  e é definido por

$$T = \begin{cases} \inf \{t : U(t) < 0\} \\ \infty \text{ se } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t > 0 \end{cases}$$

A probabilidade de ocorrência da ruína para um certo valor de  $u$ , em horizonte infinito, é representada por

$$\psi(u) = \Pr[T < \infty | U(0) = u], \quad (1.4)$$

e a probabilidade de sobrevivência é designada por

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \Pr[u + c\tau - S(\tau) \geq 0, \text{ para } \forall \tau > 0] \\ &= 1 - \psi(u). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Na prática, a maioria das seguradoras estão apenas interessadas no cálculo da probabilidade de ruína num longo período de tempo, porém finito, como por exemplo 20 anos, e logo não estão preocupadas com o horizonte infinito. Assim, designa-se por

$$\psi(u, t) = \Pr[T \leq t | U(0) = u] \quad (1.6)$$

a probabilidade de ruína em horizonte finito, e por

$$\begin{aligned} \delta(u, t) &= \Pr[u + c\tau - S(\tau) \geq 0, \text{ para } 0 < \tau \leq t] \\ &= 1 - \psi(u, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

a probabilidade de sobrevivência em horizonte finito.

O modelo clássico apresentado é simplista de modo a que possa ser tratado matematicamente. No entanto, fornece dados importantes sobre o processo de risco e deverá, por isso, ser complementado com análises adicionais de modo a melhorar a organização e os resultados de qualquer seguradora.





## 1.3 O modelo de Poisson em tempo discreto

### 1.3.1 Hipóteses do modelo

O modelo seguinte pode ser considerado como uma versão em tempo discreto do modelo desenvolvido na secção anterior. Para a sua caracterização considerou-se a abordagem seguida por Dickson e Waters (1991). Essencialmente, assenta no seguinte:

- as indemnizações individuais são variáveis aleatórias i.i.d. nos inteiros não negativos com valor médio  $\beta > 1$ ;
- o prémio cobrado por unidade de tempo é 1;
- o número esperado de indemnizações por unidade de tempo é  $1/(1 + \theta)\beta$ .

Note-se que em relação às hipóteses subjacentes ao modelo em tempo contínuo, agora operou-se uma mudança na unidade de tempo.

### 1.3.2 O processo de reserva em tempo discreto

A reserva de uma carteira da seguradora no fim do período  $n$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , dada uma reserva inicial  $u \geq 0$ , é designada por

$$U_d(n) = u + n - S_d(n), \quad (1.8)$$

com  $U_d(0) = u$ , onde  $S_d(n)$  é o montante das indemnizações agregadas ocorridas nos primeiros  $n$  períodos de tempo, com distribuição  $F_d(x, n)$  e função de probabilidade  $f_d(x, n)$ . Por comodidade, designe-se  $f_j = f_d(j, 1)$  e  $F_j = F_d(j, 1)$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$ .

Se  $X_i$  designar o montante total das indemnizações agregadas ocorridas durante o período  $i$ , então

$$S_d(n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (1.9)$$

sendo  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias i.i.d., cada qual com função de probabilidade  $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ .

### 1.3.3 A distribuição de Poisson composta

A função de distribuição de  $X_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, n$ , que é uma distribuição composta, se bem que o seu cálculo seja extremamente difícil de apurar, foi estudada por Panjer (1981), mostrando que a função de probabilidade  $\{f_i\}_{i=0}^\infty$  pode ser calculada recursivamente, se a função de probabilidade de  $N = N(1)$ ,  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ , satisfaz a recursão

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

com  $a, b$  constantes, e, se as indemnizações individuais,  $Y_i$ , são distribuídas nos inteiros positivos. No caso da distribuição de Poisson,  $a = 0$  e  $b = \lambda$ . Sundt (1992) provou que este resultado pode ser generalizado às distribuições que satisfazem

$$p_n = \sum_{i=1}^k \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

com  $p_n = 0$  para  $n < 0$ ,  $k$  inteiro e  $a_i, b_i$  constantes.

Neste sentido, e usando a fórmula recursiva de Panjer, a função de probabilidade de  $X_j$  é dada por

$$f(i) = \frac{\lambda}{i} \sum_{j=1}^i j g(j) f(i-j), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

com

$$f(0) = e^{-\lambda}, \quad (1.13)$$

onde  $g(\cdot)$  é a função de probabilidade das indemnizações individuais. Mas quando o suporte de  $g(\cdot)$  é restrito a  $j = 1, 2, \dots, r$ , então a equação (1.12) reduz-se a

$$f(i) = \frac{\lambda}{i} \sum_{j=1}^m j g(j) f(i-j), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

com  $m = \min\{i, r\}$ . Note-se, também, que a aplicação da fórmula recursiva é válida quando alguns dos  $g$ 's são nulos.

Na aplicação das Fórmulas (1.12) e (1.13), é necessário impôr que as indemnizações individuais tomam valores nos inteiros positivos, apesar de se verificar que as indemnizações de valor nulo sucedem com alguma frequência. Nestes casos, ou seja, quando  $Y$  é distribuída nos inteiros não negativos, recorre-se ao Resultado (6.3) de Sundt e Jewell (1981), sendo que

$$f(i) = \frac{\lambda}{i} \sum_{j=1}^i j g(j) f(i-j), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

com

$$f(0) = e^{-\lambda(1-g(0))}. \quad (1.16)$$



Quando as indemnizações particulares têm uma distribuição do tipo contínuo, misto ou discreta, mas não aritmética ou quando ainda pode ser considerada aritmética, mas com um período pouco conveniente, então pode-se proceder a uma “discretização” das distribuições de modo a possibilitar o uso da fórmula recursiva de Panjer.

Uma solução apresentada foi a proposta por De Vylder e Goovaerts (1988) em que se começa por escolher a unidade monetária, através da escolha do parâmetro de escala, e designando por  $Z = \beta Y$ , com  $\beta > 0$ , a variável aleatória das indemnizações particulares reparametrizada para a nova unidade monetária. Assim, ter-se-á

$$G_Z(z) = G_Y\left(\frac{z}{\beta}\right). \quad (1.17)$$

Depois substitui-se a função de distribuição  $G$  por uma distribuição discreta  $G^D$ , tomando, para isso, massas de probabilidade  $g_j^D$  nos pontos  $j$ , com  $j = 0, 1, 2, \dots$ , tal que

$$G_j^D = g_0^D + g_1^D + \dots + g_j^D = \int_j^{j+1} G_Z(z) dz. \quad (1.18)$$

Este processo de discretização permite obter uma distribuição que aproxima a distribuição inicial mantendo o valor esperado  $\beta$ . Quanto maior for  $\beta$ , melhor será a aproximação.

### 1.3.4 A ruína em tempo discreto

No caso discreto, a ruína ocorre quando a reserva, pela primeira vez, toma valores negativos. Assim, o momento da ocorrência de tal acontecimento,  $T_d$ , é definido por

$$T_d = \begin{cases} \min \{n : U_d(n) < 0, n = 1, 2, 3, \dots\} \\ \infty \text{ se } U_d(n) \geq 0 \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

A probabilidade de ruína em horizonte infinito, dada uma reserva inicial  $u$ , é designada por

$$\psi_d(u) = \Pr [T_d < \infty \mid U_d(0) = u], \quad (1.19)$$

sendo a probabilidade de sobrevivência dada por

$$\begin{aligned} \delta_d(u) &= \Pr [u + \tau - S_d(\tau) \geq 0, \text{ para } \tau = 1, 2, \dots] \\ &= 1 - \psi_d(u). \end{aligned} \quad (1.20)$$

A probabilidade de ruína em horizonte finito, dada uma reserva inicial  $u$ , é

$$\psi_d(u, t) = \Pr [T_d \leq t \mid U_d(0) = u], \quad (1.21)$$

e a probabilidade de sobrevivência é definida por

$$\begin{aligned} \delta_d(u, t) &= \Pr [u + \tau - S_d(\tau) \geq 0, \text{ para } \tau = 1, 2, \dots, t] \\ &= 1 - \psi_d(u, t). \end{aligned} \quad (1.22)$$



## Capítulo 2

# Os algoritmos de De Vylder e Goovaerts e de Dickson e Waters

### 2.1 Introdução

Considerando o modelo descrito na Secção 1.3, vamos, neste capítulo, descrever dois algoritmos para o cálculo de probabilidades de ruína no caso discreto, que podem ser aplicados no cálculo das referidas probabilidades em tempo contínuo.

Na secção seguinte, apresentamos um método de cálculo recursivo para as probabilidades de ruína em horizonte finito. Este método deve-se a De Vylder e Goovaerts (1988), mas que foi melhorado por Dickson e Waters (1991), sendo este apresentado na Secção 2.3. O seu melhoramento inclui também o cálculo de

probabilidades de ruína em horizonte temporal infinito. Na Secção 2.4 é apresentada uma alteração ao algoritmo de De Vylder e Goovaerts tendo em conta a redefinição do Tempo de Ruína (ver Dickson e Waters (1991), Secção 8).

## 2.2 O algoritmo de De Vylder e Goovaerts

O método desenvolvido por De Vylder e Goovaerts para o cálculo de probabilidades de sobrevivência em horizonte finito, considerando o caso discreto, é o seguinte:

$$\delta_d(u, 1) = \sum_{j=0}^{u+1} f_j = F_{u+1}, \quad (2.1)$$

$$\delta_d(u, t) = \sum_{j=0}^{u+1} \delta_d(u+1-j, t-1) f_j, \quad t \geq 2. \quad (2.2)$$

O raciocínio que está na base deste algoritmo é o seguinte:

- $\delta_d(u, 1)$  pode ser calculado directamente a partir de (2.1), desde que seja conhecida a função de probabilidade  $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ ,
- para  $t \geq 2$ ,  $\delta_d(u, t)$  pode ser calculado condicionando a reserva após um período de tempo; com probabilidade  $f_j$ , esta reserva toma o valor  $u+1-j$  e a probabilidade de sobrevivência durante  $t-1$  períodos de tempo é  $\delta_d(u+1-j, t-1)$ .

A partir de (2.1) e (2.2) podemos obter as expressões que nos permitem calcular



as probabilidades de ruína:

$$\psi_d(u, 1) = 1 - F_{u+1}, \quad (2.3)$$

$$\psi_d(u, t) = 1 - F_{u+1} + \sum_{j=0}^{u+1} \psi_d(u+1-j, t-1) f_j, \quad t \geq 2. \quad (2.4)$$

Os cálculos necessários para obter (2.4) podem ser melhor analisados considerando a Figura 2.1. Suponhamos que se pretende calcular  $\psi_d(u, t)$ , com  $t > 1$ . Primeiro calcula-se  $\psi_d(\omega, 1)$  para  $\omega = 0, 1, \dots, u+t-1$  usando (2.3). Depois, recorrendo a (2.4) calcula-se  $\psi_d(\omega, 2)$  para  $\omega = 0, 1, 2, \dots, u+t-2$ , após o que se calcula  $\psi_d(\omega, 3)$  para  $\omega = 0, 1, 2, \dots, u+t-3$  utilizando novamente (2.4), e assim por diante, até se obter  $\psi_d(\omega, t-1)$  para  $\omega = 0, 1, 2, \dots, u+1$ , permitindo, finalmente, calcular  $\psi_d(u, t)$ .

Dado que o algoritmo envolve grande número de cálculos com consequente demora de tempo de processamento e erros de arredondamento, os referidos autores, debruçaram-se ainda sobre o problema de como pequenas probabilidades podem ser desprezadas, de forma a limitar os erros de arredondamento e reduzir esse mesmo tempo de processamento em computador.

Assim, fixando um dado  $\epsilon > 0$  e considerando  $k_0$  tal que  $F_{k_0} \geq 1 - \epsilon$ , defina-se  $F^\epsilon$  ( $\epsilon$  é um índice) da seguinte forma:

$$F_j^\epsilon = \begin{cases} F_j & , \quad j \leq k_0 \\ 1 & , \quad j > k_0 \end{cases},$$

e considere-se

$$\psi_d^\epsilon(u, 1) = \begin{cases} 1 - F_{u+1}^\epsilon & , \quad u \leq u_1 \\ 0 & , \quad u > u_1 \end{cases},$$



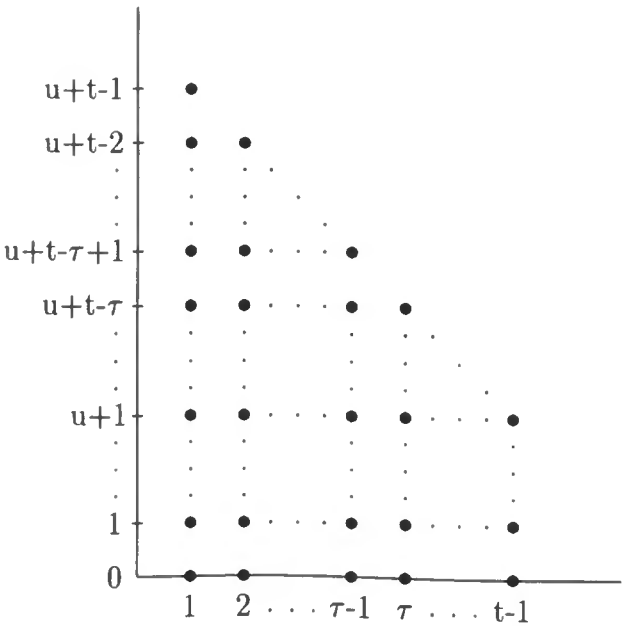


Figura 2.1: Combinações de  $\omega$  e  $\tau$  dos valores  $\psi_d(\omega, \tau)$  necessários para o cálculo de  $\psi_d(u, t)$

onde  $u_1$  é tal que  $\psi_d^\epsilon(u_1, 1) \leq \epsilon$ , e também, para  $t = 2, 3, \dots$ , considere-se

$$\psi_d^\epsilon(u, t) = \begin{cases} 1 - F_{u+1}^\epsilon + \sum_{j=0}^{\min(u+1, k_0)} \psi_d^\epsilon(u+1-j, t-1) f_j & , \quad u \leq u_t \\ 0 & , \quad u > u_t \end{cases},$$

onde  $u_t$  é tal que  $\psi_d^\epsilon(u_t, t) \leq \epsilon$ .

Resulta que no máximo o erro cometido ao aproximar  $\psi_d(u, t)$  por  $\psi_d^\epsilon(u, t)$  será  $3t\epsilon$ , ou seja,

$$\psi_d(u, t) - \psi_d^\epsilon(u, t) \leq 3t\epsilon, \quad (2.5)$$

para todo o  $t = 1, 2, \dots$ .

Conclui-se também, através deste procedimento de truncagem, que o algoritmo descrito é numericamente estável.

De Vylder e Goovaerts constataram ainda que

$$\delta_d(u-1, t) \leq \delta(u, t) \leq \delta_d(u, t), \quad (2.6)$$

pelo que propuseram para aproximação de  $\psi(u, t)$  a média

$$\bar{\psi}_d(u, t) = \frac{1}{2} (\psi_d(u, t) + \psi_d(u-1, t)). \quad (2.7)$$



## 2.3 O algoritmo de Dickson e Waters

### 2.3.1 Em horizonte finito

Dickson e Waters (1991) a partir do algoritmo de De Vylder e Goovaerts (1988), desenvolveram um novo método de cálculo da probabilidade de sobrevivência em horizonte finito. Para tal, começaram por obter uma aproximação em tempo discreto de  $\delta(u, t)$ . Esta resulta duma mudança efectuada na unidade monetária e na unidade de tempo, e também da discretização do processo de risco. Estas hipóteses foram já caracterizadas na Sub-secção 1.3.1. Assim, concluíram que

$$\delta(u, t) \approx \delta_d(u\beta, (1 + \theta)\beta t), \quad (2.8)$$

onde  $u\beta$  e  $(1 + \theta)\beta t$  são inteiros. Intuitivamente  $\delta_d(u, t)$  deverá ser uma boa aproximação de  $\delta(u, t)$  se, para um dado  $t$ , o número de unidades de tempo re-escaladas,  $(1 + \theta)\beta t$ , é grande, isto é, na prática corresponde a verificar o processo de risco com grande frequência, no tempo, reduzindo as possibilidades do processo de risco em determinado período de tempo ter “arruinado” e recuperado durante o mesmo.

O ponto de partida para o novo modelo é a Fórmula (2.2). Considerando  $u > 1$  e  $t > 0$ , e re-escrevendo esta fórmula, obtém-se

$$\delta_d(u - 1, t + 1) = \sum_{i=0}^u f_i \delta_d(u - i, t), \quad (2.9)$$

a partir da qual se tem

$$\delta_d(u, t) = f_0^{-1} \left[ \delta_d(u - 1, t + 1) - \sum_{i=1}^u f_i \delta_d(u - i, t) \right]. \quad (2.10)$$

Para o cálculo de  $\delta_d(0, t)$ , foi estabelecida a seguinte expressão (ver Dickson e Waters (1991), Secção 4),

$$\begin{aligned}\delta_d(0, t) &= f_0^{-1} \sum_{j=1}^{t+1} \frac{j}{t+1} f_d(t+1-j, t+1) \\ &= f_0^{-1} \sum_{j=0}^t \frac{1}{t+1} F_d(j, t+1).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Note-se que, uma vez que  $S_d(t)$  tem distribuição de Poisson composta com indemnizações individuais distribuídas nos inteiros não negativos,  $F_d(j, t)$  pode ser calculada usando a fórmula recursiva de Panjer (1981), descrita na Subsecção 1.3.3.

Para calcular  $\delta_d(u, t)$ , inicialmente é necessário calcular  $\delta_d(1, t+u-1)$  a partir de  $\delta_d(0, t+u)$  e de  $\delta_d(0, t+u-1)$ . São, então, depois calculadas as probabilidades de sobrevivência no momento  $u+t-2$ , começando por obter  $\delta_d(1, t+u-2)$  e depois  $\delta_d(2, u+t-2)$ . A seguir, calculam-se as probabilidades de sobrevivência no momento  $t+u-3$ , e assim sucessivamente até se obter as probabilidades de sobrevivência no momento  $t$ . A Figura 2.2 ilustra as combinações de  $\omega$  e  $\tau$  dos valores  $\delta_d(\omega, \tau)$ , necessários para calcular  $\delta_d(u, t)$  usando a Fórmula (2.10).

As Fórmulas (2.10) e (2.11) são exactas para o cálculo de  $\delta_d(u\beta, (1+\theta)\beta t)$ . No entanto, os referidos autores verificaram que, devido à aproximação em tempo discreto da probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo, as aproximações obtidas excediam  $\delta(u, t)$  (ver Fórmula (2.6)). Porém existe outra razão para que  $\delta_d(u\beta, (1+\theta)\beta t)$  seja uma aproximação por excesso de  $\delta(u, t)$ , na medida em que no caso discreto, a ruína não ocorre quando a reserva se situa acima do

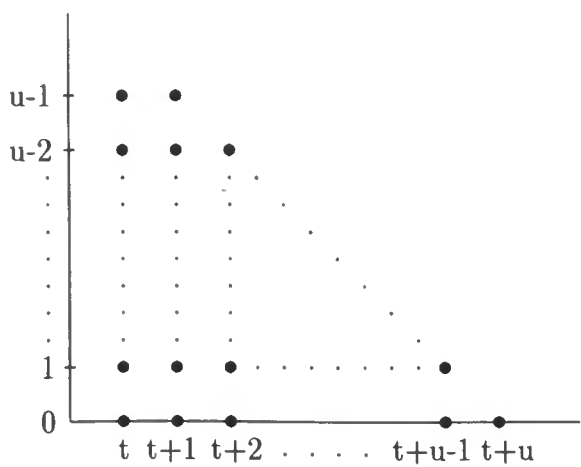


Figura 2.2: Combinações de  $\omega$  e  $\tau$  dos valores  $\delta_d(\omega, \tau)$  necessários para o cálculo de  $\delta_d(u, t)$

valor -1 (mas pode ser zero a qualquer momento). No entanto, em tempo contínuo, a reserva nunca deve descer abaixo de zero, por mais pequena que seja essa descida (ver Dickson e Waters (1991), Secção 8).

Repare-se ainda que,  $U_d(n)$  toma apenas valores inteiros,  $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$ , e para que a ruína não ocorra basta que a mesma se situe acima do valor zero, porque se no fim de um dado período a reserva é zero, podem ocorrer duas situações: ou o processo de reserva em tempo contínuo toma exactamente o valor zero – e este acontecimento tem probabilidade nula – ou a reserva atingiu valores negativos no último período. Assim, parece lógico que, no modelo discreto, uma reserva igual a zero deva representar ruína. Todavia, se a reserva inicial é  $u = 0$ , a ruína não ocorre no momento zero.

Deste modo, convém redefinir o momento da ruína, em tempo discreto, passando este a ser

$$T_d^* = \begin{cases} \min \{n : U_d(n) \leq 0, n = 1, 2, 3, \dots\} \\ \infty \text{ se } U_d(n) > 0 \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases},$$

sendo, agora, as probabilidades de ruína e de sobrevivência, quer em horizonte finito como infinito, definidas por

$$\psi_d^*(u, t) = \Pr [T_d^* \leq t \mid U_d(0) = u], \quad (2.12)$$

$$\psi_d^*(u) = \Pr [T_d^* < \infty \mid U_d(0) = u], \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \delta_d^*(u, t) &= \Pr [u + \tau - S_d(\tau) \geq 1, \text{ para } \tau = 1, 2, \dots, t] \\ &= 1 - \psi_d^*(u, t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_d^*(u) &= \Pr [u + \tau - S_d(\tau) \geq 1, \text{ para } \tau = 1, 2, \dots] \\ &= 1 - \psi_d^*(u). \end{aligned} \quad (2.15)$$

É de referir que  $\delta_d^*(u, t)$  difere de  $\delta_d(u, t)$  no sentido da reserva ser estritamente positiva, para  $t > 0$ . Resulta então, por (1.22) e (2.14), que

$$\delta_d^*(u, t) = \delta_d(u - 1, t). \quad (2.16)$$

Usando, para o Tempo de Ruína, a variável aleatória  $T_d^*$ , Dickson e Waters (1991) reformularam o algoritmo por eles desenvolvido. Os referidos autores verificaram que

$$\delta_d^*(0, t + 1) = f_0 \delta_d(0, t), \quad (2.17)$$

de onde resulta, utilizando a Fórmula (2.11), que

$$\delta_d^*(0, t) = \sum_{j=1}^t \frac{j}{t} f_d(t-j, t) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} F_d(j, t). \quad (2.18)$$

Usando, agora, as Fórmulas (2.16) e (2.17), e considerando  $u = 1$ , vem que

$$\delta_d^*(1, t) = \delta_d(0, t) = f_0^{-1} \delta_d^*(0, t+1), \quad (2.19)$$

e para  $u \geq 2$ , usando novamente (2.16) e também (2.10), resulta que

$$\begin{aligned} \delta_d^*(u, t) &= \delta_d(u-1, t) \\ &= f_0^{-1} \left[ \delta_d(u-2, t+1) - \sum_{i=1}^{u-1} f_i \delta_d(u-1-i, t) \right] \\ &= f_0^{-1} \left[ \delta_d^*(u-1, t+1) - \sum_{i=1}^{u-1} f_i \delta_d^*(u-i, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A partir destas últimas três fórmulas, obtêm-se as correspondentes expressões para o cálculo das probabilidades de ruína:

$$\begin{aligned} \psi_d^*(0, t) &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t (1 - j f_d(t-j, t)) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} (1 - F_d(j, t)), \\ \psi_d^*(1, t) &= f_0^{-1} (f_0 - 1 + \psi_d^*(0, t+1)), \\ \psi_d^*(u, t) &= f_0^{-1} \left[ \psi_d^*(u-1, t+1) - 1 + F_{u-1} - \sum_{i=1}^{u-1} f_i \psi_d^*(u-i, t) \right], \quad u > 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para terminar, refira-se ainda que, os autores deste algoritmo experimentaram alguns problemas quanto à estabilidade do mesmo, particularmente no cálculo de  $\delta(u, t)$  para valores de  $u$  maiores que 30, aproximadamente, no caso de indenizações individuais com distribuição exponencial(1).

### 2.3.2 Em horizonte infinito

Vamos, agora, passar a descrever o algoritmo desenvolvido por Dickson e Waters (1991), para o horizonte temporal infinito. Usar-se-á para definir o Tempo de Ruína, tanto a variável  $T_d$  como a variável  $T_d^*$ . O ponto de partida para este método é a igualdade

$$\delta_d(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_d(u, t). \quad (2.22)$$

Assim, e utilizando a Fórmula (2.9), tem-se

$$\delta_d(u-1) = \sum_{i=0}^u f_i \delta_d(u-i), \quad (2.23)$$

que após modificação e considerando  $u > 1$  pode ser escrita da seguinte forma

$$\delta_d(u) = f_0^{-1} \left[ \delta_d(u-1) - \sum_{i=1}^u f_i \delta_d(u-i) \right]. \quad (2.24)$$

Para obter a probabilidade de sobrevivência para  $u = 0$ , os citados autores estabeleceram que

$$\delta_d(0) = \frac{\theta}{f_0(1+\theta)}. \quad (2.25)$$

Considerando agora o tempo de ruína definido por  $T_d^*$ , e usando (1.20) e (2.15), obtém-se a igualdade

$$\delta_d^*(u) = \delta_d(u-1). \quad (2.26)$$



A partir daqui e utilizando inicialmente a Fórmula (2.17) e depois as Fórmulas (2.19) e (2.20), obtêm-se

$$\begin{aligned}\delta_d^*(0) &= f_0 \delta_d(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}, \\ \delta_d^*(1) &= f_0^{-1} \delta_d^*(0), \\ \delta_d(u) &= f_0^{-1} \left[ \delta_d^*(u-1) - \sum_{i=1}^{u-1} f_i \delta_d^*(u-i) \right], \quad u > 1.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Quanto às probabilidades de ruína, elas são obtidas através das expressões

$$\begin{aligned}\psi_d^*(0) &= \frac{1}{1 + \theta}, \\ \psi_d^*(1) &= f_0^{-1} (f_0 - 1 + \psi_d^*(0)), \\ \psi_d^*(u) &= f_0^{-1} \left[ \psi_d^*(u-1) - 1 + F_{u-1} - \sum_{i=1}^{u-1} f_i \psi_d^*(u-i) \right], \quad u > 1.\end{aligned}\tag{2.28}$$

De notar que  $\psi_d^*(0)$  coincide com  $\psi(0)$  no modelo clássico.

## 2.4 Alteração ao algoritmo de De Vylder e Goovaerts

De Vylder e Goovaerts (1988) consideraram, na elaboração do algoritmo desenvolvido pelos mesmos que, em tempo discreto, a ruína ocorre quando a reserva da seguradora toma valores inteiros negativos, isto é, para que a ruína não ocorra, é necessário que a reserva se situe acima do valor -1 (pode ser zero a qualquer momento). Tendo em conta as razões descritas na Sub-secção 2.3.1, será preferível

considerar que a ruína, em tempo discreto, ocorre quando a reserva toma valores não positivos.

Assim, atendendo à redefinição do tempo de ruína e considerando as indenizações agregadas no fim do primeiro período de tempo, tem-se

$$\begin{aligned}\psi_d^*(u, 1) &= 1 - F_u, \\ \psi_d^*(u, t) &= 1 - F_u + \sum_{j=0}^u f_j \psi_d^*(u + 1 - j, t - 1), \quad t \geq 2.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Para obter valores aproximados de  $\psi(u, t)$ , em vez de se usar a Fórmula (2.7), como De Vylder e Goovaerts (1988) sugerem, considera-se a aproximação  $\psi_d^*(u\beta, (1 + \theta)\beta t)$  que produz melhores resultados.

Consegue-se ainda obter a função de probabilidade (imprópria) de  $T_d^*$ . Para tal, e como se considera o caso discreto, pode-se, para  $t = 1, 2, \dots$ , escrever a probabilidade de ruína da seguinte forma:

$$\psi_d^*(u, t) = \Pr[T_d^* \leq t \mid U_d(0) = u] = \sum_{i=1}^t \phi_d^*(u, i),\tag{2.30}$$

sendo, portanto, a função de probabilidade de  $T_d^*$  representada por  $\phi_d^*(u, t)$ , ou seja,

$$\phi_d^*(u, t) = \Pr[T_d^* = t \mid U_d(0) = u].\tag{2.31}$$

Assim, a partir das Fórmulas (2.29), obtêm-se as expressões para  $\phi_d^*(u, t)$ ,

$$\begin{aligned}\phi_d^*(u, 1) &= \psi_d^*(u, 1) = 1 - F_u, \\ \phi_d^*(u, t) &= \sum_{j=0}^u f_j \phi_d^*(u + 1 - j, t - 1), \quad t \geq 2.\end{aligned}\tag{2.32}$$

## Capítulo 3

# O novo algoritmo recursivo

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado um novo algoritmo que permite obter directamente a distribuição da variável aleatória Tempo de Ruína. Para a sua elaboração são inicialmente revistas algumas noções sobre cadeias de Markov que depois servirão para analisar o processo de reserva. Finalmente, é descrito o novo método de cálculo recursivo de probabilidades de ruína, bem como a apresentação de alguns exemplos numéricos para várias distribuições das indemnizações individuais.

## 3.2 Algumas noções sobre cadeias de Markov

Seja  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  um processo estocástico. Diz-se que  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Markov (ver Parzen (1962)) se, para qualquer conjunto de  $n$  pontos no tempo,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , do espaço de parâmetros, a distribuição condicional de  $Y(t_n)$ , dados os valores de  $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_{n-1})$ , depende apenas do mais recente valor,  $Y(t_{n-1})$ . Mais precisamente, se para quaisquer números reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se assume

$$\begin{aligned} \Pr[Y(t_n) \leq x_n | Y(t_1) = x_1, Y(t_2) = x_2, \dots, Y(t_{n-1}) = x_{n-1}] = \\ = \Pr[Y(t_n) \leq x_n | Y(t_{n-1}) = x_{n-1}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Assim, intuitivamente, num processo de Markov a evolução futura, conhecido o presente, não depende do passado.

Um processo deste tipo com espaço dos estados – conjunto dos possíveis valores do processo – finito ou numerável, isto é, discreto, e com espaço de parâmetros também discreto, designa-se por cadeia de Markov. Para facilidade de notação, designe-se  $Y_r = Y(t_r)$ . Diz-se que  $Y_n$  está no estado  $i$  se  $Y_n = i$ .

A probabilidade de transição do processo estar no estado  $j$  no instante  $m$  se estava no estado  $i$  no instante  $n$ , representa-se por

$$P_{i,j}^{n,m} = \Pr[Y_m = j | Y_n = i]. \quad (3.2)$$

Uma cadeia de Markov diz-se homogénea (ou homogénea no tempo ou com probabilidades de transição estacionárias) quando as probabilidades  $P_{i,j}^{n,m}$  depen-

dem apenas da diferença  $m - n$ , ou seja, são independentes da variável tempo. Assim, designa-se por

$$P_{i,j}^{(n)} = \Pr[Y_{t+n} = j | Y_t = i] \quad (3.3)$$

a probabilidade de transição em  $n$  passos, para todo o inteiro  $t \geq 0$ . Estas probabilidades podem ser representadas matricialmente através da matriz  $P^{(n)} = [P_{i,j}^{(n)}]$ . Por simplicidade, as probabilidades de transição num passo são designadas por  $P_{i,j}$ , e representadas pela matriz  $P = [P_{i,j}]$ .

Por exemplo, no caso do espaço de estados ser  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , a matriz  $P$  será

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \cdots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A matriz  $P$  (finita ou infinita) é designada por matriz de Markov ou matriz de probabilidades de transição do processo ou ainda por matriz estocástica, verificando-se

$$\begin{aligned} P_{i,j} &\geq 0, & \text{para todo } i, j, \\ \sum_j P_{i,j} &= 1, & \text{para todo } i. \end{aligned}$$

Uma relação fundamental satisfeita pelas probabilidades de transição de uma cadeia de Markov são as chamadas equações de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{\text{estados } k} P_{i,k}^{(m)} P_{k,j}^{(n)}, \quad (3.4)$$

para qualquer par de valores inteiros não negativos  $m$  e  $n$ , onde

$$P_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

podendo as mesmas ser escritas na forma matricial:

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}, \quad (3.5)$$

e portanto  $P^{(n)} = P^n$  é a matriz de probabilidades de transição em  $n$  passos.

Outra noção, da qual iremos fazer uso, é a de estado absorvente. Um estado  $i$  diz-se absorvente se  $P_{i,i} = 1$  ( $P_{i,j} = 0$  se  $i \neq j$ ), ou seja, a partir do momento em que esse estado é acedido, então o processo manter-se-á sempre nesse estado.

Também interessa considerar a noção de matriz sub-estocástica, que é aquela cujos elementos são maiores ou iguais a zero e a soma dos elementos por linha é menor ou igual a um. Segundo Feller (1968, p.400) toda a matriz sub-estocástica pode ser alargada a uma matriz estocástica, adicionando um estado absorvente, isto é, adicionando, à matriz, uma linha inicial  $1, 0, 0, \dots$ , e uma coluna cujos elementos sejam um menos a soma de cada linha da matriz sub-estocástica. Assim, toda a teoria acerca das matrizes estocásticas pode ser aplicada a matrizes sub-estocásticas, em particular as equações de Chapman-Kolmogorov.

### 3.3 Análise do processo de reserva em tempo discreto

Utilizando as noções descritas na secção anterior, vamos agora analisar o processo de reserva. Ora, como já foi visto na Sub-secção 1.3.2, o processo de reserva, em tempo discreto, é definido por

$$U_d(t) = u + t - S_d(t), \quad (3.6)$$

com  $t = 0, 1, 2, \dots$ , e dada uma reserva inicial  $u \geq 0$ . Sendo

$$S_d(t+1) = S_d(t) + X_{t+1}, \quad (3.7)$$

então resulta que  $U_d(t+1)$  pode ser escrito em função de  $U_d(t)$ , isto é

$$U_d(t+1) = U_d(t) + 1 - X_{t+1}, \quad (3.8)$$

de onde se pode concluir que

$$U_d(t+1) = \begin{cases} U_d(t) + 1 & \text{se } X_{t+1} = 0, \\ U_d(t) & \text{se } X_{t+1} = 1, \\ U_d(t) - 1 & \text{se } X_{t+1} = 2, \\ \dots & \end{cases}$$

O processo de reserva é Markoviano, pois, para quaisquer números reais  $u_1, u_2, \dots, u_t, u_{t+1}$ , se observa que

$$\begin{aligned} \Pr[U_d(t+1) = u_{t+1} \mid U_d(0) = u, U_d(1) = u_1, \dots, U_d(t) = u_t] = \\ \Pr[U_d(t) + 1 - X_{t+1} = u_{t+1} \mid U_d(0) = u, U_d(1) = u_1, \dots, U_d(t) = u_t] = \\ \Pr[U_d(t) + 1 - X_{t+1} = u_{t+1} \mid U_d(t) = u_t]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

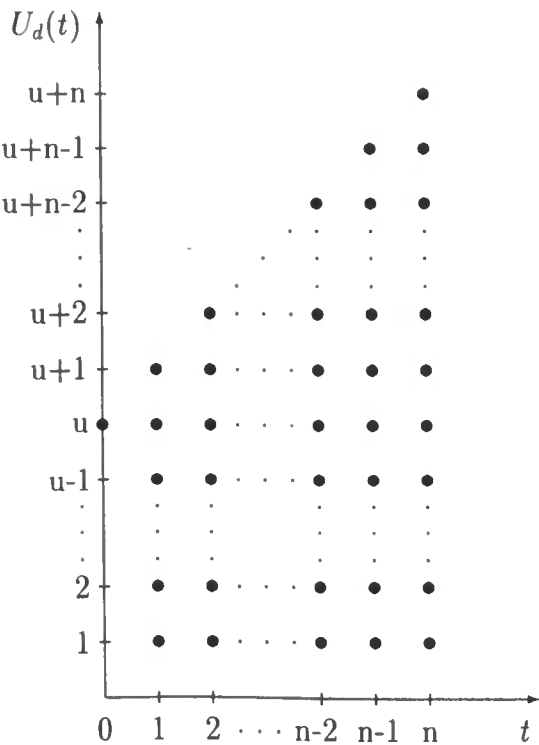


Figura 3.1: Valores positivos que  $U_d(t)$  pode tomar

Suponha-se agora que  $U_d(t)$  toma apenas valores positivos. Os possíveis valores que  $U_d(t)$  pode assumir entre o período 1 e o período  $n$ , estão representados na Figura 3.1. É de referir ainda que após o fim de cada período, a reserva só se pode situar, no máximo, numa posição acima daquela em que já estava no período anterior.

$U_d(t)$  é um processo homogêneo cujas probabilidades de transição num passo



são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 P_{u,j} &= \Pr[U_d(1) = j \mid U_d(0) = u] \\
 &= \Pr[U_d(0) + 1 - X_1 = j \mid U_d(0) = u] \\
 &= \Pr[X_1 = u + 1 - j] \\
 &= f_{u+1-j},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

com  $1 \leq j \leq u + 1$ , e também para  $1 \leq r \leq u + t - 1$  e  $1 \leq s \leq u + t$ , recordando que, no máximo,  $s$  toma o valor  $r + 1$ ,

$$\begin{aligned}
 P_{r,s} &= \Pr[U_d(t) = s \mid U_d(t-1) = r] \\
 &= \Pr[U_d(t-1) + 1 - X_t = s \mid U_d(t-1) = r] \\
 &= \Pr[r + 1 - X_t = s] \\
 &= \Pr[X_t = r + 1 - s] \\
 &= f_{r+1-s}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, atendendo ao que já foi dito, se a reserva, no fim do período  $n - 1$ , toma o valor  $x$ , no período seguinte a reserva pode tomar:

- o valor  $x + 1$  se não ocorreram sinistros, com probabilidade  $f_0$ ;
- o valor  $x$  se ocorreram indemnizações de montante total igual a 1, com probabilidade  $f_1$ ;
- o valor  $x - 1$  se ocorreram indemnizações de montante total igual a 2, com probabilidade  $f_2$ ;

e assim sucessivamente (ver Figura 3.2).

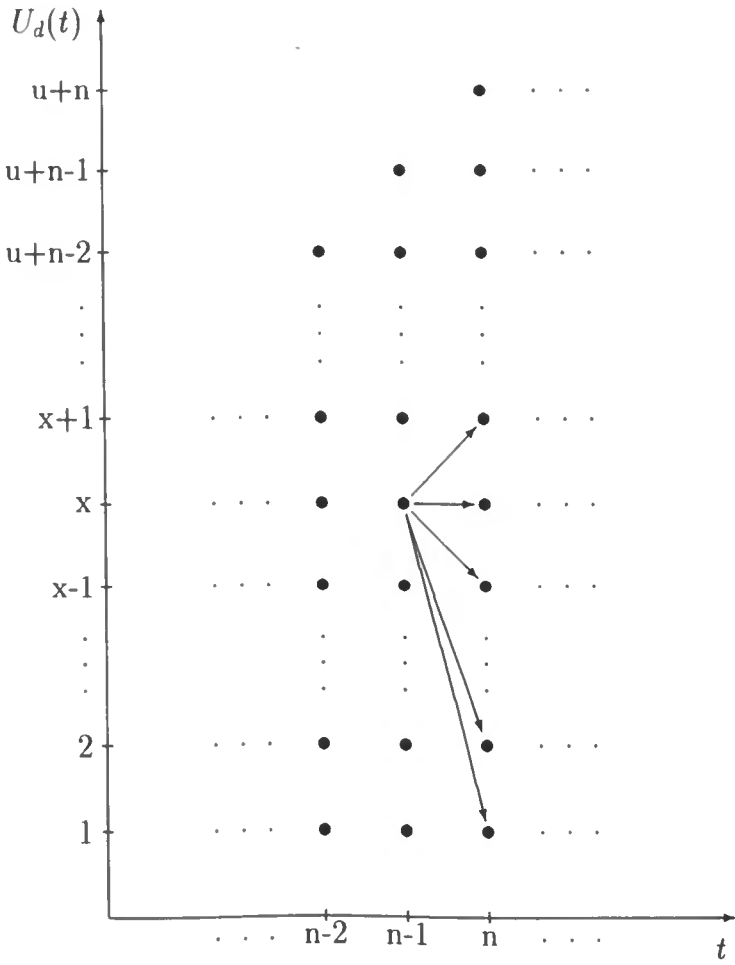


Figura 3.2: Valores que  $U_d(n)$  pode tomar, supondo que  $U_d(n-1) = x$



Quanto ao estado '0', ele é absorvente e representa a posição de ruína englobando todos os valores não positivos que o processo de reserva pode tomar. Note-se que quando a ruína ocorre o processo pára e a ruína mantém-se.

### 3.4 O algoritmo

Neste ponto iremos tratar do desenvolvimento do novo algoritmo considerando que a reserva inicial é  $u > 0$ . Relativamente ao caso  $u = 0$ , ele será tratado mais à frente. Ora, a função de distribuição (imprópria) do tempo de ruína,  $T_d^*$ , pode ser dada por

$$\psi_d^*(u, t) = \Pr [T_d^* \leq t \mid U_d(0) = u] = \sum_{i=1}^t \phi_d^*(u, i), \quad (3.12)$$

onde

$$\phi_d^*(u, i) = \Pr [T_d^* = i \mid U_d(0) = u] \quad (3.13)$$

é a respectiva função de probabilidade. Então, a probabilidade de que a ruína ocorra no fim do primeiro período é dada por

$$\psi_d^*(u, 1) = \phi_d^*(u, 1) = \Pr [T_d^* = 1 \mid U_d(0) = u] = f_{u+1} + f_{u+2} + \dots = 1 - F_u. \quad (3.14)$$

Considerando agora  $t \geq 2$ , resulta que

$$\psi_d^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{i=2}^t \phi_d^*(u, i). \quad (3.15)$$

Quanto à ruína, ela ocorre no fim do período  $i$ , com  $2 \leq i \leq t$ , se:

- (i) o processo de reserva no fim do período  $i - 1$  é  $j$ , onde  $j$  é um qualquer valor entre 1 e  $u + i - 1$  e a reserva tenha sido sempre positiva até ao fim do período  $i - 2$ ;
- (ii) o montante das indemnizações agregadas no fim do  $i$ -ésimo período é maior ou igual a  $j + 1$ .

A probabilidade de (ii) é  $1 - F_j$  e a probabilidade de (i) é

$$\Pr[U_d(i-1) = j, U_d(k) > 0, k = 1, 2, \dots, i-2 \mid U_d(0) = u]. \quad (3.16)$$

Atendendo ao que já foi dito na secção anterior, esta última probabilidade é igual ao  $j$ -ésimo elemento do  $u$ -ésimo vector linha da matriz  $P^{i-1}$ , isto é,  $P_{u,j}^{(i-1)}$ . Assim, a Fórmula (3.13) pode ser descrita da seguinte forma

$$\phi_d^*(u, i) = \Pr[T_d^* = i \mid U_d(0) = u] = \sum_{j=1}^{u+i-1} P_{u,j}^{(i-1)}(1 - F_j), \quad (3.17)$$

de onde resulta, para  $t \geq 2$ ,

$$\psi_d^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{i=2}^t \sum_{j=1}^{u+i-1} P_{u,j}^{(i-1)}(1 - F_j). \quad (3.18)$$

Para obter  $P_{u,j}^{(i-1)}$ , com  $i = 2, 3, \dots, t$ , bastará calcular a matriz  $P^{i-1}$ , considerando a matriz  $P$  constituída pelas primeiras  $u + t - 1$  linhas e colunas, dado ser este o número máximo de estados que o processo de reserva pode tomar. No

entanto, esta tarefa pode ser facilitada na medida em que, o que se pretende é determinar os elementos do  $u$ -ésimo vector linha da matriz  $P^{i-1}$ . Assim, designemos por  $P_u^j$ , com  $j = 1, 2, \dots, t-1$ , o  $u$ -ésimo vector linha da matriz  $P^j$  e consideremos o primeiro destes vectores, ou seja,

$$P_u^1 = \begin{bmatrix} f_u & f_{u-1} & \cdots & f_1 & f_0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}.$$

Fazendo uso do cálculo de matrizes, obtêm-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} P_u^2 &= P_u^1 \times P, \\ P_u^3 &= P_u^2 \times P, \\ &\dots \\ P_u^{i-1} &= P_u^{i-2} \times P, \end{aligned}$$

que nos permitem calcular de forma recursiva o  $u$ -ésimo vector linha de cada uma das matrizes  $P^j$ , bastando para tal considerar unicamente a matriz  $P$ . Observando novamente a matriz  $P$ , e uma vez que esta é constituída por um grande número de elementos iguais a zero e dado que  $P_u^1$  tem apenas os primeiros  $u+1$  elementos não nulos, conclui-se que para obter  $P_u^2$  bastará multiplicar  $P_u^1$  pelas primeiras  $u+2$  colunas de  $P$ , pois as restantes colunas da mesma matriz têm os primeiros  $u+1$  elementos iguais a zero. Após esta operação de cálculo,  $P_u^2$  terá, apenas, os primeiros  $u+2$  elementos não nulos. Quanto ao cálculo de  $P_u^3$ , ele processa-se da mesma forma. Bastará multiplicar  $P_u^2$  pelas primeiras  $u+3$  colunas de  $P$ , uma vez que as restantes colunas têm os primeiros  $u+2$  elementos iguais a zero. Seguindo este raciocínio, bastará multiplicar  $P_u^{i-2}$  pelas primeiras  $(u+i-1)$  colunas de  $P$ , para obter  $P_u^{i-1}$ , que será um vector com os primeiros  $(u+i-1)$  elementos

não nulos. Através deste processo, obtêm-se os valores estritamente necessários ao cálculo da distribuição do Tempo de Ruína,  $T_d^*$ , o que nos leva a concluir que o algoritmo, aqui apresentado, será mais rápido que os métodos de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Dickson e Waters (1991), facto que verificámos após os resultados da programação em computador.

Atendendo à constituição do vector  $P_u^1$ , podemos explicitar, ainda mais, a Fórmula (3.18). Assim,

$$\psi_d^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{j=1}^{u+1} P_{u,j}^{(1)}(1 - F_j) + \sum_{i=3}^t \sum_{j=1}^{u+i-1} P_{u,j}^{(i-1)}(1 - F_j) \quad (3.19)$$

$$= 1 - F_u + \sum_{j=1}^{u+1} f_{u+1-j}(1 - F_j) + \sum_{i=3}^t \sum_{j=1}^{u+i-1} P_{u,j}^{(i-1)}(1 - F_j), \quad (3.20)$$

e uma vez que

$$P_{u,u+i-1}^{(i-1)} = f_0^{i-1}, \quad (3.21)$$

então obtemos

$$\begin{aligned} \psi_d^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{j=1}^{u+1} f_{u+1-j}(1 - F_j) \\ + \sum_{i=3}^t \left[ \sum_{j=1}^{u+i-2} P_{u,j}^{(i-1)}(1 - F_j) + f_0^{i-1}(1 - F_{u+i-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Quanto à função de probabilidade, ela fica definida através das seguintes

expressões:

$$\begin{aligned}
 \phi_d^*(u, 1) &= 1 - F_u, \\
 \phi_d^*(u, 2) &= \sum_{j=1}^{u+1} f_{u+1-j} (1 - F_j), \\
 \phi_d^*(u, t) &= \sum_{j=1}^{u+t-2} P_{u,j}^{(t-1)} (1 - F_j) + f_0^{t-1} (1 - F_{u+t-1}), \quad t \geq 3.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Quando a reserva inicial é zero, a fórmula deduzida anteriormente mantém-se válida. Para tal, basta considerar inicialmente o vector

$$P_0^1 = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

e ter em conta que para  $u = 0$  a ruína não ocorre no momento 0. Se a ruína não ocorre no fim do primeiro período, o processo de reserva tem de passar, obrigatoriamente, para o estado 1, e isso ocorre com probabilidade  $f_0$ , e por isso se tem o vector  $P_0^1$  constituído desta maneira.

Para obter valores aproximados da probabilidade de ruína em tempo contínuo consideramos as aproximações  $\psi_d^*(u\beta, (1+\theta)\beta t)$ , tal como Dickson e Waters (1991) propuseram.

### 3.5 Exemplos numéricos

De seguida são apresentadas tabelas de valores de  $\psi(u, t)$  para diversas combinações de  $u$  e de  $t$  e para quatro distribuições das indemnizações individuais. Em qualquer um dos casos descritos a seguir, considerou-se  $\theta = 0.1$  e  $\beta = 20$ .



Poder-se-ia ter utilizado outros valores para o parâmetro de discretização  $\beta$ , por exemplo 100, mas constatou-se que as diferenças não são significativas e também porque para  $\beta = 20$  se obtêm gráficos da densidade do Tempo de Ruína com uma boa precisão. O processo de discretização utilizado é o proposto por De Vylder e Goovaerts (1988), descrito na Sub-secção 1.3.3.

As distribuições das indemnizações individuais consideradas são as seguintes:

- Distribuição exponencial de parâmetro 1, isto é, com função densidade

$$g_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0, \quad (3.24)$$

- Distribuição gama com parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$ , isto é, com função densidade

$$g_Y(y) = 4e^{-2y}y, \quad y > 0, \quad (3.25)$$

- Distribuição gama de parâmetros  $\alpha = 3$  e  $\beta = 3$ , isto é, com função densidade

$$g_Y(y) = \frac{27}{2}e^{-3y}y^2, \quad y > 0, \quad (3.26)$$

- Distribuição de Pareto de parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ , isto é, com função densidade

$$g_Y(y) = \frac{2}{(1+y)^3}, \quad y > 0. \quad (3.27)$$

Para cada uma das distribuições mencionadas obtiveram-se as Tabelas 3.1–3.4, respectivamente.

A chave da Tabela 3.1 é a seguinte:

- (1) valor exacto de  $\psi(u, t)$  (ver Seal (1978), Tabela 2.4);
- (2) valor aproximado de  $\psi(u, t)$  usando o algoritmo de Dickson e Waters (1991);
- (3) valor aproximado de  $\psi(u, t)$  usando a Fórmula (3.22).

Notar que os valores (2) e (3) são iguais. Nas restantes tabelas, os valores que constam são calculados pelo algoritmo desenvolvido na secção anterior.

As Figuras 3.3–3.10 permitem comparar, os gráficos das densidades próprias do Tempo de Ruína, isto é,  $\phi(u, t)/\psi(u)$ , sendo o numerador calculado pelo algoritmo desenvolvido neste capítulo e o denominador obtido usando o método de Dickson e Waters (1991), relativamente a cada uma das distribuições consideradas anteriormente. Como comentário aos gráficos obtidos, refira-se que as densidades são decrescentes para valores baixos de  $u$ , mas isso já não acontece quando  $u$  toma valores mais elevados, verificando-se que as densidades são funções unimodais, sendo a moda atingida tanto mais tarde quanto maior for o valor de  $u$ .

Tabela 3.1:  $\psi(u, t)$ . Exponencial(1)

		$t$							
		1	5	10	20	30	40	50	
$u$	0	0.4634	0.7196	0.7854	0.8318	0.8520	0.8638	0.8716	(1)
		0.4634	0.7196	0.7854	0.8318	0.8520	0.8638	0.8716	(2)
		0.4634	0.7196	0.7854	0.8318	0.8520	0.8638	0.8716	(3)
	1	0.2381	0.5119	0.6126	0.6906	0.7261	0.7471	0.7613	(1)
		0.2381	0.5119	0.6126	0.6906	0.7261	0.7471	0.7613	(2)
		0.2381	0.5119	0.6126	0.6906	0.7261	0.7471	0.7613	(3)
	2	0.1197	0.3544	0.4691	0.5673	0.6142	0.6426	0.6620	(1)
		0.1197	0.3545	0.4692	0.5674	0.6143	0.6427	0.6620	(2)
		0.1197	0.3545	0.4692	0.5674	0.6143	0.6427	0.6620	(3)
	3	0.0592	0.2395	0.3531	0.4612	0.5158	0.5497	0.5730	(1)
		0.0592	0.2396	0.3531	0.4613	0.5159	0.5497	0.5731	(2)
		0.0592	0.2396	0.3531	0.4613	0.5159	0.5497	0.5731	(3)
	4	0.0288	0.1584	0.2614	0.3711	0.4300	0.4675	0.4938	(1)
		0.0288	0.1584	0.2615	0.3712	0.4301	0.4676	0.4939	(2)
		0.0288	0.1584	0.2615	0.3712	0.4301	0.4676	0.4939	(3)
	5	0.0138	0.1027	0.1906	0.2956	0.3559	0.3954	0.4236	(1)
		0.0138	0.1027	0.1906	0.2957	0.3559	0.3955	0.4237	(2)
		0.0138	0.1027	0.1906	0.2957	0.3559	0.3955	0.4237	(3)
	6	0.0066	0.0654	0.1369	0.2332	0.2924	0.3326	0.3617	(1)
		0.0066	0.0654	0.1369	0.2332	0.2924	0.3326	0.3618	(2)
		0.0066	0.0654	0.1369	0.2332	0.2924	0.3326	0.3618	(3)

Tabela 3.1:  $\psi(u, t)$ . Exponencial(1)

		$t$							
		1	5	10	20	30	40	50	
$u$	7	0.0031	0.0409	0.0969	0.1821	0.2385	0.2781	0.3075	(1)
		0.0031	0.0410	0.0970	0.1822	0.2386	0.2782	0.3075	(2)
		0.0031	0.0410	0.0970	0.1822	0.2386	0.2782	0.3075	(3)
	8	0.0014	0.0253	0.0678	0.1410	0.1932	0.2313	0.2601	(1)
		0.0014	0.0253	0.0678	0.1410	0.1933	0.2313	0.2602	(2)
		0.0014	0.0253	0.0678	0.1410	0.1933	0.2313	0.2602	(3)
	9	0.0007	0.0154	0.0468	0.1081	0.1554	0.1913	0.2191	(1)
		0.0007	0.0154	0.0468	0.1081	0.1555	0.1913	0.2192	(2)
		0.0007	0.0154	0.0468	0.1081	0.1555	0.1913	0.2192	(3)
	10	0.0003	0.0092	0.0319	0.0821	0.1242	0.1573	0.1837	(1)
		0.0003	0.0092	0.0319	0.0822	0.1242	0.1574	0.1837	(2)
		0.0003	0.0092	0.0319	0.0822	0.1242	0.1574	0.1837	(3)

Tabela 3.2:  $\psi(u, t)$ . Gama(2,2)

		<i>t</i>							
		1	5	10	20	30	40	50	100
<i>u</i>	0	0.5116	0.7494	0.8068	0.8468	0.8639	0.8738	0.8804	0.8954
	1	0.2487	0.5184	0.6150	0.6889	0.7221	0.7417	0.7547	0.7848
	2	0.1022	0.3318	0.4455	0.5424	0.5884	0.6160	0.6346	0.6784
	3	0.0393	0.2031	0.3136	0.4202	0.4740	0.5072	0.5300	0.5843
	4	0.0144	0.1196	0.2151	0.3205	0.3778	0.4143	0.4398	0.5019
	5	0.0051	0.0680	0.1438	0.2409	0.2980	0.3357	0.3626	0.4299
	10	0.0000	0.0026	0.0137	0.0464	0.0777	0.1038	0.1253	0.1892
	15	0.0000	0.0001	0.0008	0.0064	0.0157	0.0262	0.0366	0.0768
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0025	0.0054	0.0091	0.0286

Tabela 3.3:  $\psi(u, t)$ . Gama(3,3)

		<i>t</i>							
		1	5	10	20	30	40	50	100
<i>u</i>	0	0.5322	0.7606	0.8148	0.8523	0.8683	0.8775	0.8836	0.8973
	1	0.2508	0.5191	0.6142	0.6866	0.7190	0.7379	0.7505	0.7793
	2	0.0917	0.3187	0.4322	0.5289	0.5745	0.6018	0.6202	0.6628
	3	0.0306	0.1854	0.2942	0.3999	0.4533	0.4862	0.5087	0.5618
	4	0.0095	0.1028	0.1941	0.2971	0.3534	0.3893	0.4142	0.4748
	5	0.0028	0.0545	0.1242	0.2168	0.2721	0.3087	0.3349	0.3999
	10	0.0000	0.0013	0.0088	0.0346	0.0612	0.0841	0.1032	0.1609
	15	0.0000	0.0000	0.0003	0.0037	0.0102	0.0180	0.0262	0.0590
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0031	0.0055	0.0195

Tabela 3.4:  $\psi(u, t)$ . Pareto(2,1)

		<i>t</i>							
		1	5	10	20	30	40	50	100
<i>u</i>	0	0.3895	0.6197	0.6939	0.7531	0.7814	0.7990	0.8114	0.8432
	1	0.1724	0.4079	0.5103	0.5990	0.6432	0.6711	0.6908	0.7422
	2	0.0961	0.2927	0.3999	0.5007	0.5532	0.5869	0.6110	0.6745
	3	0.0601	0.2181	0.3210	0.4261	0.4833	0.5208	0.5479	0.6201
	4	0.0406	0.1668	0.2616	0.3663	0.4259	0.4658	0.4949	0.5738
	5	0.0290	0.1302	0.2156	0.3171	0.3775	0.4187	0.4492	0.5332
	10	0.0088	0.0476	0.0932	0.1652	0.2174	0.2570	0.2883	0.3820
	15	0.0041	0.0229	0.0477	0.0941	0.1331	0.1655	0.1627	0.2821
	20	0.0024	0.0131	0.0278	0.0578	0.0857	0.1107	0.1328	0.2122

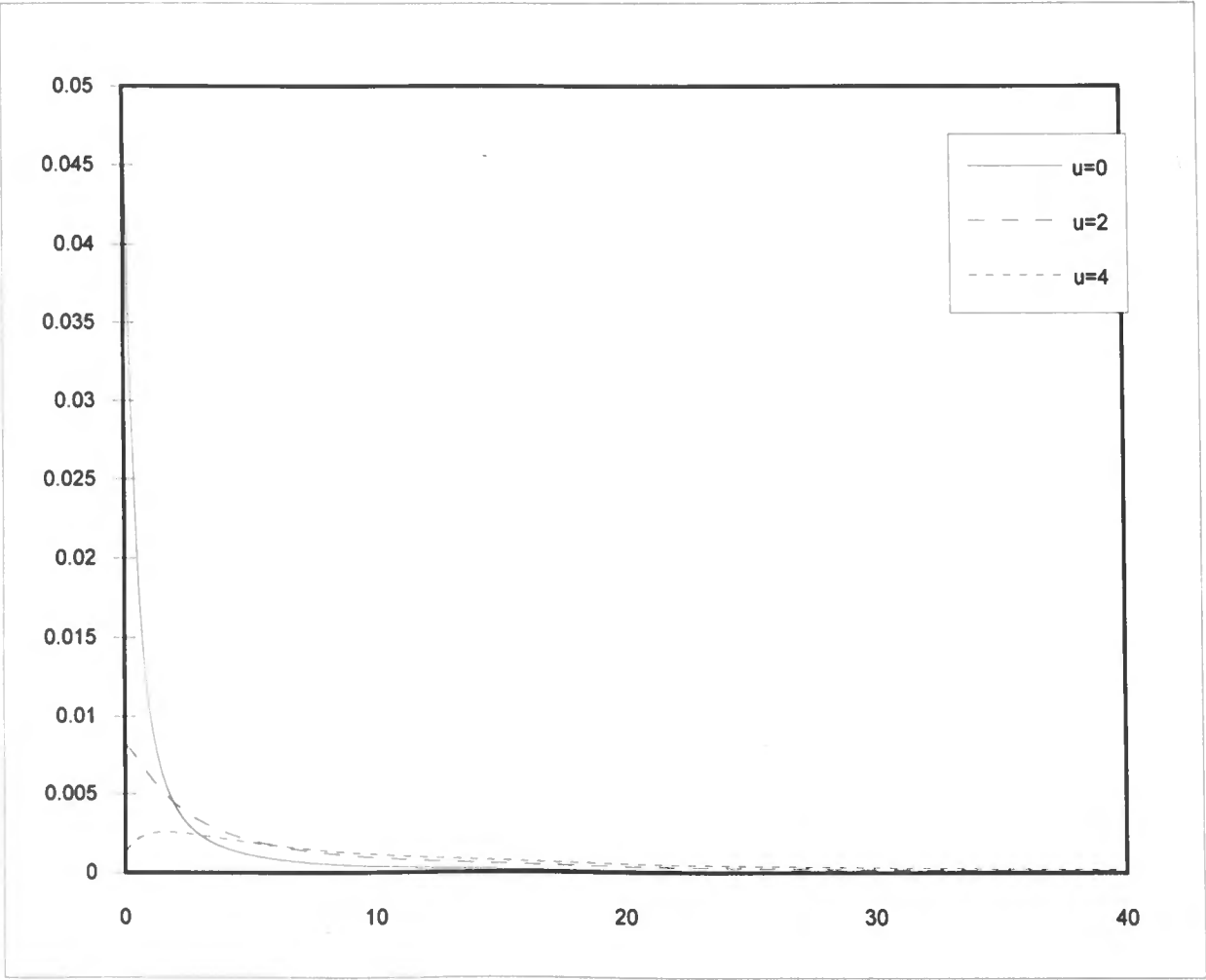


Figura 3.3: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Exponencial(1)

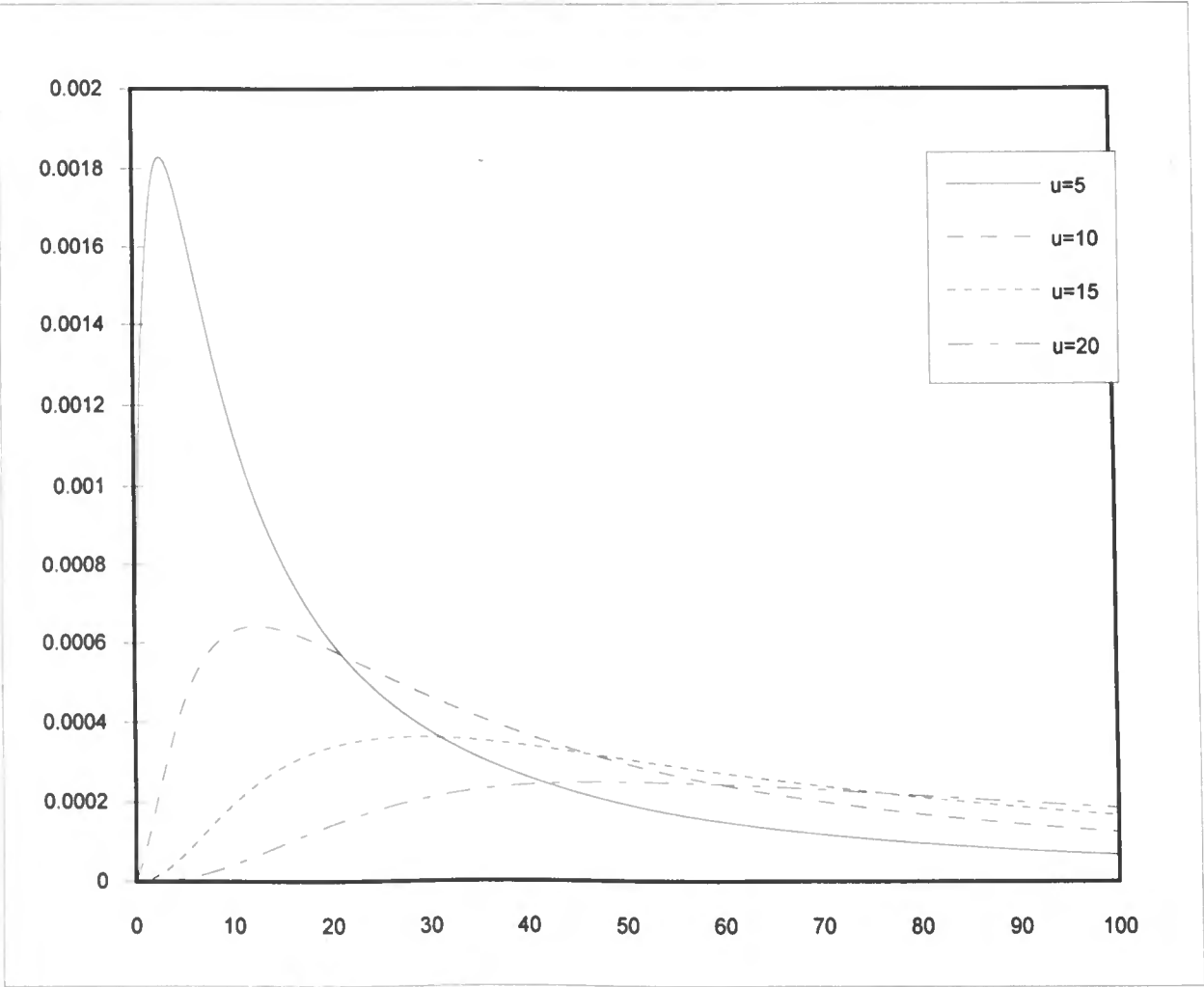


Figura 3.4: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Exponencial(1)



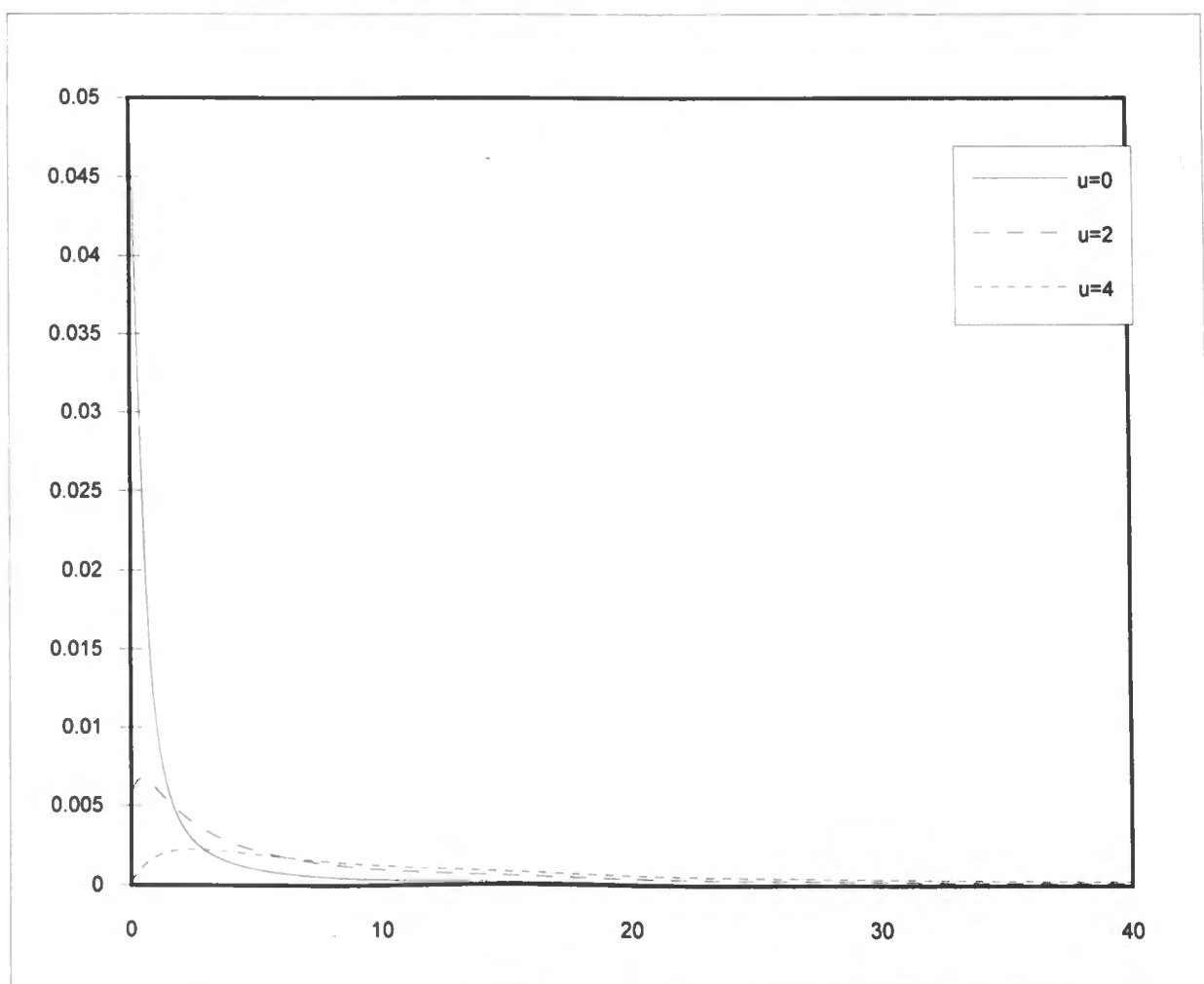


Figura 3.5: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Gama(2,2)

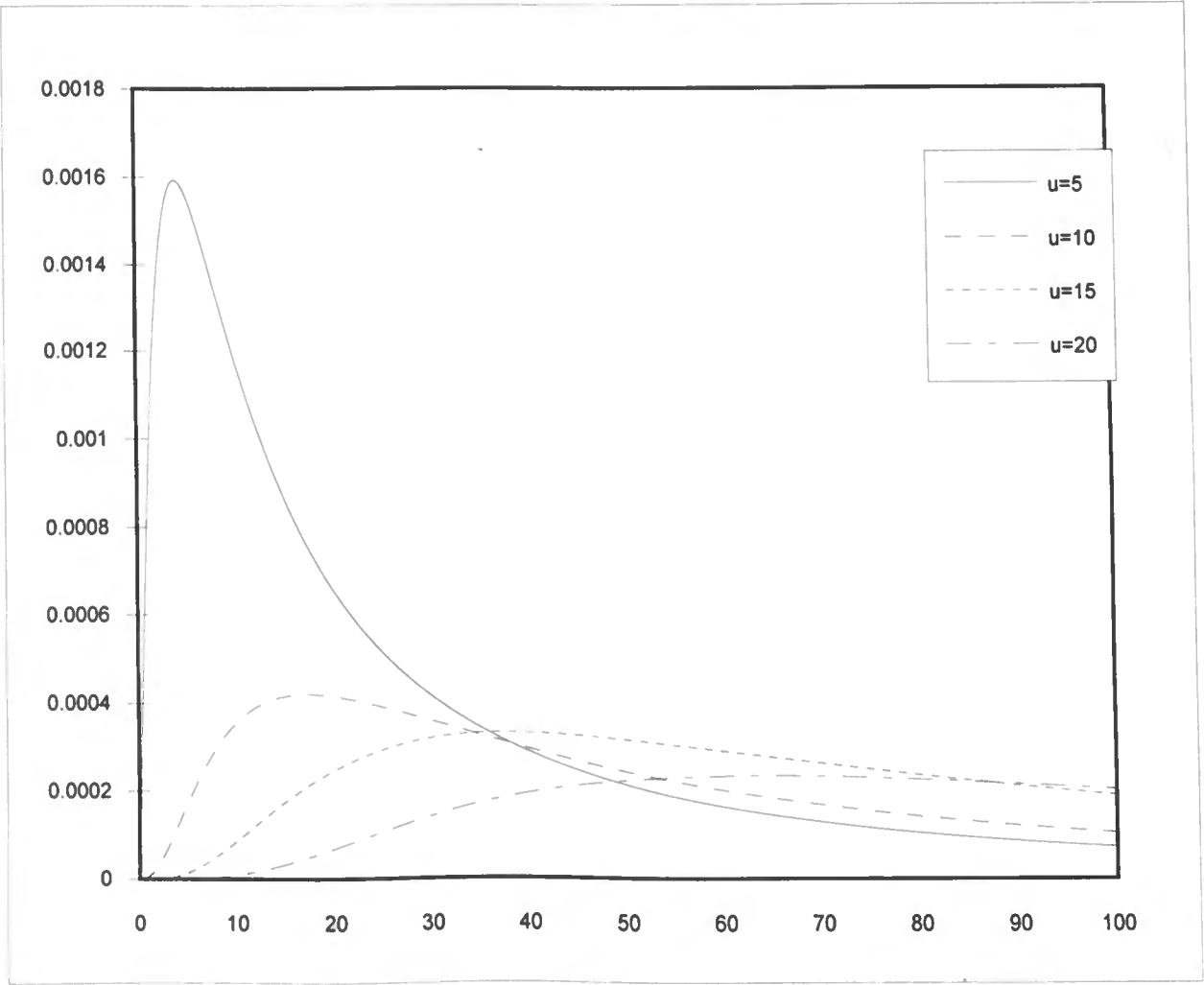


Figura 3.6: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Gama(2,2)

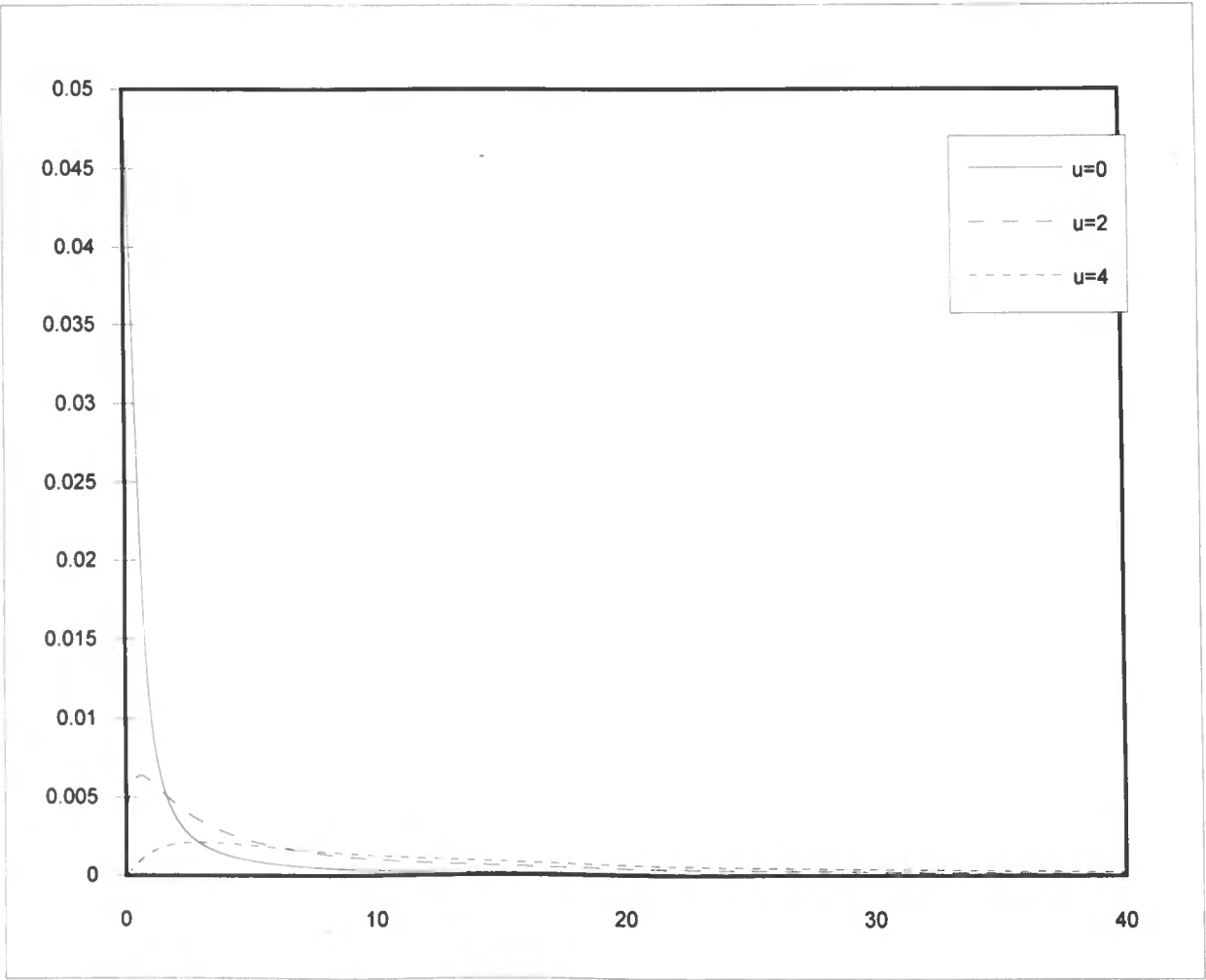


Figura 3.7: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Gama(3,3)

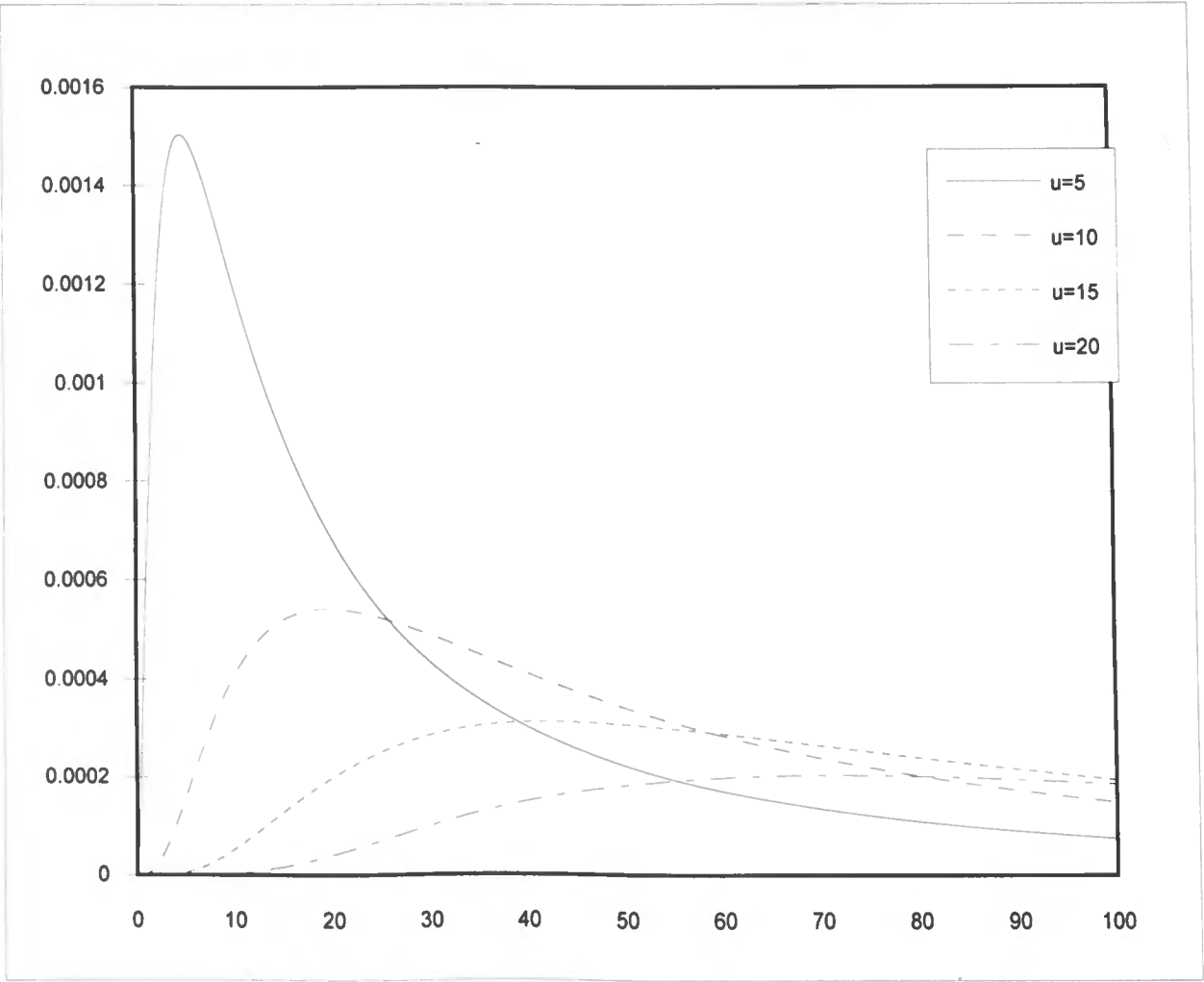


Figura 3.8: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Gama(3,3)

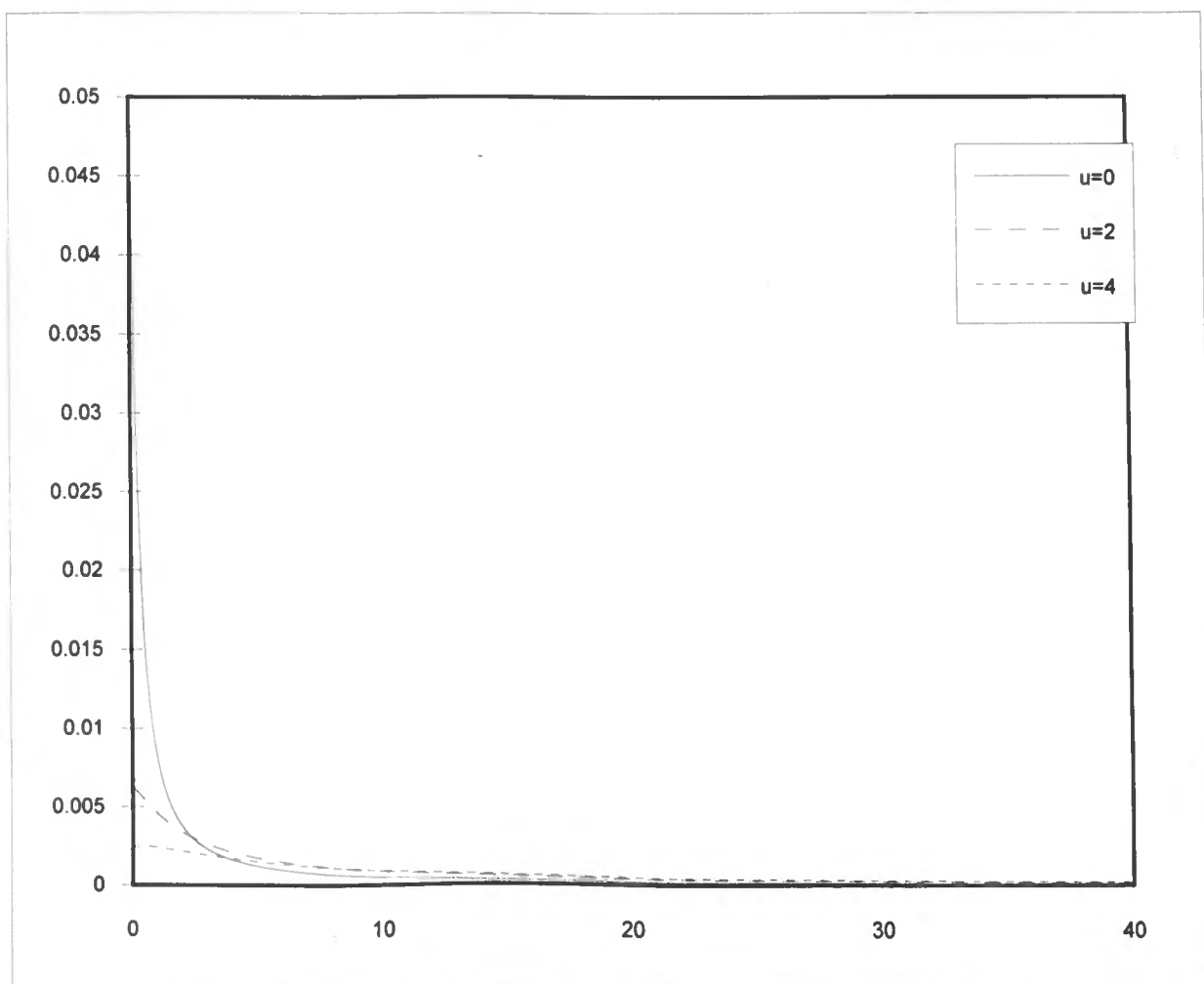


Figura 3.9: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 0, 2, 4$ . Pareto(2,1)

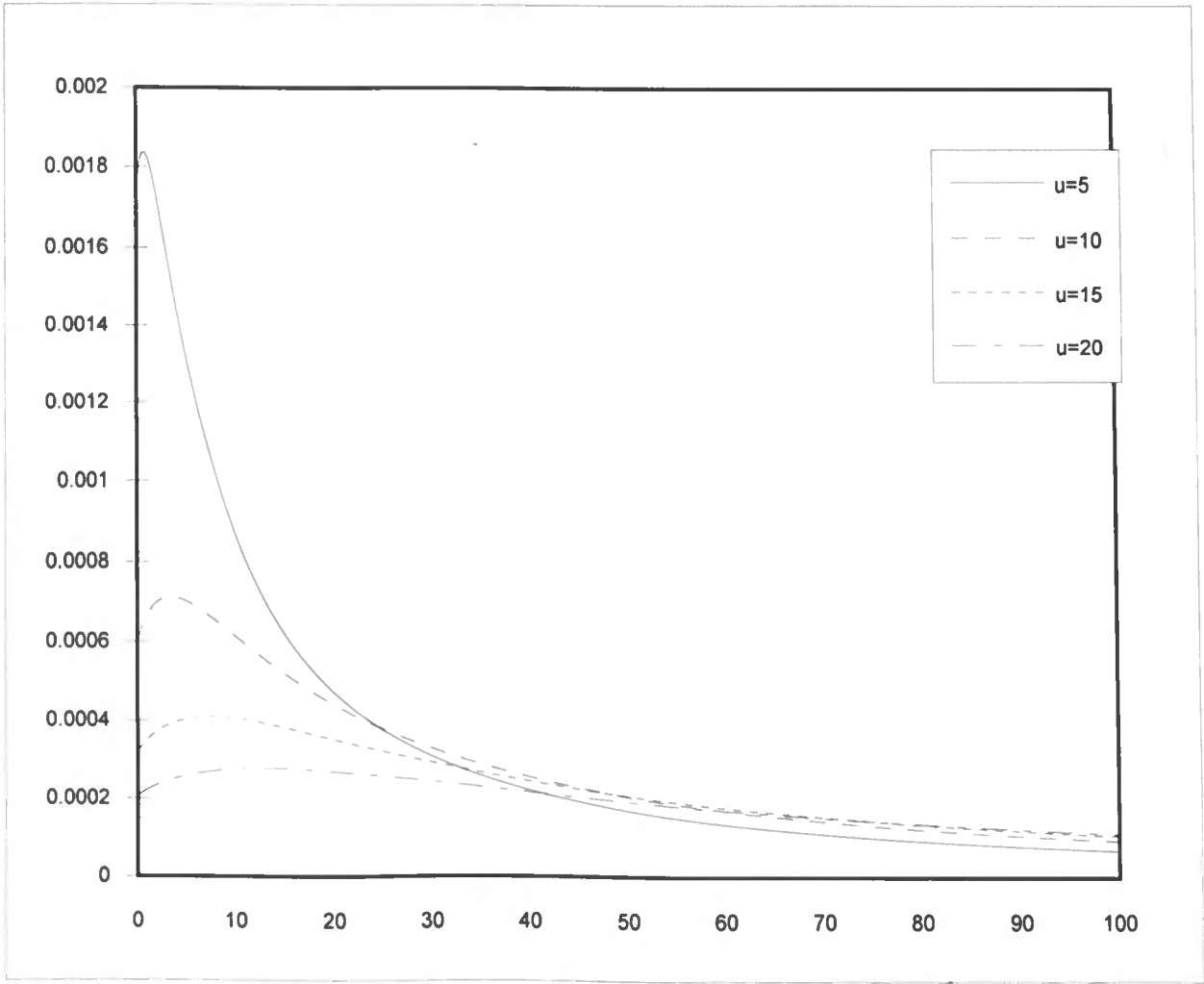


Figura 3.10: Densidade do Tempo de Ruína. Para  $u = 5, 10, 15, 20$ . Pareto(2,1)

## Capítulo 4

# Probabilidades de ruína com barreira superior absorvente

### 4.1 Introdução

A teoria clássica de risco preocupa-se com o problema do cálculo da probabilidade da reserva de risco se tornar negativa. Pode ser argumentado que é mais realístico introduzir uma barreira superior num certo nível positivo  $k$  que quando ultrapassada pode significar que o prémio cobrado é muito elevado e pouco competitivo.

Este processo de reserva restrito pára quando a reserva de risco ultrapassa zero ou  $k$ . É certo que ocorre uma coisa ou outra, dado que se assume que o

prémio cobrado por unidade de tempo é superior ao valor médio das indemnizações individuais, o que significa que a reserva de risco (sem restrições) tende para  $+\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , podendo cruzar ou não o nível de ruína. Mesmo que cruze, o processo tenderá para  $+\infty$ .

Na presença de uma barreira superior, a ruína ocorre quando a reserva se torna negativa sem que antes tenha excedido  $k$ . Vamos designar a probabilidade deste acontecimento por  $\xi(u, k)$ . É claro que  $\psi(u) = \xi(u, \infty)$ .

Dickson e Gray (1984) estabeleceram que

$$\xi(u, k) = \frac{\psi(u) - \psi(k)}{1 - \psi(k)}. \quad (4.1)$$

Em horizonte finito, e na presença de uma barreira superior  $k$ , a probabilidade de ruína será representada por  $\xi(u, k, t)$ , e é exactamente, o cálculo desta probabilidade, utilizando o algoritmo descrito anteriormente, o objectivo deste capítulo.

## 4.2 Em tempo discreto e horizonte finito

No caso discreto e na presença de uma barreira superior  $k$ ,  $U_d(n)$  irá tomar os valores '0',  $1, 2, \dots, k-1, k$ , com  $k > u$ , sendo '0' e  $k$  dois estados absorventes, com '0' a ter o significado descrito na Secção 3.3.

Assumindo que  $U_d(n)$  toma apenas os valores  $1, 2, \dots, k-1$ , a matriz de probabilidades de transição num passo, será



	1	2	3	4	...	$u-1$	$u$	$u+1$	...	$k-2$	$k-1$
1	$f_1$	$f_0$	0	0	...	0	0	0	...	0	0
2	$f_2$	$f_1$	$f_0$	0	...	0	0	0	...	0	0
3	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_0$	...	0	0	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u-1$	$f_{u-1}$	$f_{u-2}$	$f_{u-3}$	$f_{u-4}$	...	$f_1$	$f_0$	0	...	0	0
$u$	$f_u$	$f_{u-1}$	$f_{u-2}$	$f_{u-3}$	...	$f_2$	$f_1$	$f_0$	...	0	0
$u+1$	$f_{u+1}$	$f_u$	$f_{u-1}$	$f_{u-2}$	...	$f_3$	$f_2$	$f_1$	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	$f_{k-2}$	$f_{k-3}$	$f_{k-4}$	$f_{k-5}$	...	$f_{k-u}$	$f_{k-u-1}$	$f_{k-u-2}$	...	$f_1$	$f_0$
$k-1$	$f_{k-1}$	$f_{k-2}$	$f_{k-3}$	$f_{k-4}$	...	$f_{k-u+1}$	$f_{k-u}$	$f_{k-u-1}$	...	$f_2$	$f_1$

Esta matriz,  $\overline{P}$ , é obtida a partir de  $P$ , considerando apenas as primeiras  $k-1$  linhas e colunas. Ela é sub-estocástica e pode ser alargada a uma matriz estocástica adicionando dois estados absorventes: o estado ‘0’ e o estado  $k$ .

Considerando o horizonte finito e assumindo que a ruína ocorre quando a reserva toma valores não positivos, designemos por  $T_d^*(k)$  o momento de ocorrência da ruína e por  $\xi_d^*(u, k, t)$  a probabilidade de ruína, dada uma reserva inicial  $u$ , na presença de uma barreira superior absorvente  $k$ .

Seguindo o mesmo raciocínio presente no desenvolvimento do algoritmo descrito no capítulo anterior, agora a ruína ocorre no fim do período  $i$ , com  $2 \leq i \leq t$ , se:

- (i) o processo de reserva no fim do período  $i-1$  é  $j$ , onde  $j$  é um qualquer valor entre 1 e o mínimo entre  $u+i-1$  e  $k-1$ , e a reserva tenha sido sempre positiva e menor que  $k$  até ao fim do período  $i-2$ ;

- (ii) o montante das indemnizações agregadas no fim do  $i$ -ésimo período é maior ou igual a  $j + 1$ ,

de onde resulta que

$$\Pr [T_d^*(k) = i \mid U_d(0) = u] = \sum_{j=1}^{\min(u+i-1, k-1)} \bar{P}_{u,j}^{(i-1)} (1 - F_j), \quad (4.2)$$

sendo portanto

$$\xi_d^*(u, k, t) = 1 - F_u + \sum_{i=2}^t \sum_{j=1}^{\min(u+i-1, k-1)} \bar{P}_{u,j}^{(i-1)} (1 - F_j). \quad (4.3)$$

O valor aproximado da probabilidade de ruína, no caso contínuo, será, atendendo às considerações feitas na Sub-seção 2.3.1,  $\xi_d^*(u\beta, k\beta, (1 + \theta)\beta t)$ , com  $u\beta$ ,  $k\beta$  e  $(1 + \theta)\beta t$  inteiros.

### 4.3 Exemplos numéricos

Não se possuindo dados para poder corroborar os valores obtidos através da expressão (4.3), a única forma de os verificar será considerar  $k$  de tal maneira elevado que as diferenças entre  $\psi(u, t)$  e  $\xi(u, k, t)$  sejam quase nulas.

Da Tabela 4.1 constam os valores aproximados de  $\psi(u, t)$  – (1) – e  $\xi(u, k, t)$  – (2) – sendo os primeiros calculados pela Fórmula (3.22) e os últimos através da Fórmula (4.3), considerando, em ambos os casos, que as indemnizações particulares são exponencialmente distribuídas. Considerou-se sempre  $\theta = 0.1$

e  $\beta = 20$ . As Figuras 4.1-4.4 permitem comparar os gráficos de  $\phi(u, t)$  e de  $\chi(u, k, t)$  – função de densidade (imprópria) de  $\xi(u, k, t)$  – para valores de  $u = 5, 10, 15, 20$ . Refira-se que para obter a probabilidade de ruína em tempo contínuo, o processo de reserva (sem restrições), no caso discreto, tomará no máximo, devido à reparametrização da unidade monetária e da unidade de tempo, o valor  $u\beta + (1 + \theta)\beta t - 1$ . No entanto, na presença de uma barreira superior absorvente, o processo de reserva tomará, no máximo, o valor  $k\beta - 1$ . Por isso, as diferenças entre os valores aproximados de  $\psi(u, t)$  e  $\xi(u, k, t)$  se começam a notar a partir de valores de  $t$  que verificam a inequação

$$\beta u + \beta(1 + \theta)t - 1 > k\beta - 1, \quad (4.4)$$

ou seja, quando

$$t > \frac{k - u}{1 + \theta}. \quad (4.5)$$

Tabela 4.1:  $\psi(u, t)$  e  $\xi(u, k, t)$ . Exponencial(1)

$(u, k)$	$t$								
	1	5	10	20	30	40	50	100	
(0,5)	0.4634	0.7196	0.7854	0.8318	0.8520	0.8638	0.8716	0.8900	(1)
	0.4634	0.7194	0.7727	0.7846	0.7850	0.7850	0.7850	0.7850	(2)
(1,5)	0.2381	0.5119	0.6126	0.6906	0.7261	0.7471	0.7613	0.7948	(1)
	0.2381	0.5101	0.5817	0.5977	0.5983	0.5983	0.5983	0.5983	(2)
(2,5)	0.1197	0.3545	0.4692	0.5674	0.6143	0.6427	0.6620	0.7083	(1)
	0.1197	0.3459	0.4123	0.4272	0.4277	0.4278	0.4278	0.4278	(2)
(3,5)	0.0592	0.2396	0.3531	0.4613	0.5159	0.5497	0.5731	0.6299	(1)
	0.0592	0.2145	0.2612	0.2717	0.2720	0.2720	0.2720	0.2720	(2)
(4,10)	0.0288	0.1584	0.2615	0.3712	0.4301	0.4676	0.4939	0.5590	(1)
	0.0288	0.1584	0.2610	0.3598	0.3968	0.4108	0.4161	0.4192	(2)
(5,10)	0.0138	0.1027	0.1906	0.2957	0.3559	0.3955	0.4237	0.4950	(1)
	0.0138	0.1027	0.1894	0.2784	0.3122	0.3249	0.3297	0.3326	(2)
(10,15)	0.0003	0.0092	0.0319	0.0822	0.1242	0.1574	0.1837	0.2606	(1)
	0.0003	0.0092	0.0318	0.0796	0.1143	0.1367	0.1508	0.1721	(2)
(15,20)	0.0000	0.0006	0.0040	0.0184	0.0366	0.0546	0.0711	0.1293	(1)
	0.0000	0.0006	0.0040	0.0181	0.0347	0.0495	0.0614	0.0902	(2)
(20,30)	0.000	0.0000	0.0004	0.0034	0.0092	0.0166	0.0246	0.0604	(1)
	0.000	0.0000	0.0004	0.0034	0.0092	0.0166	0.0245	0.0575	(2)

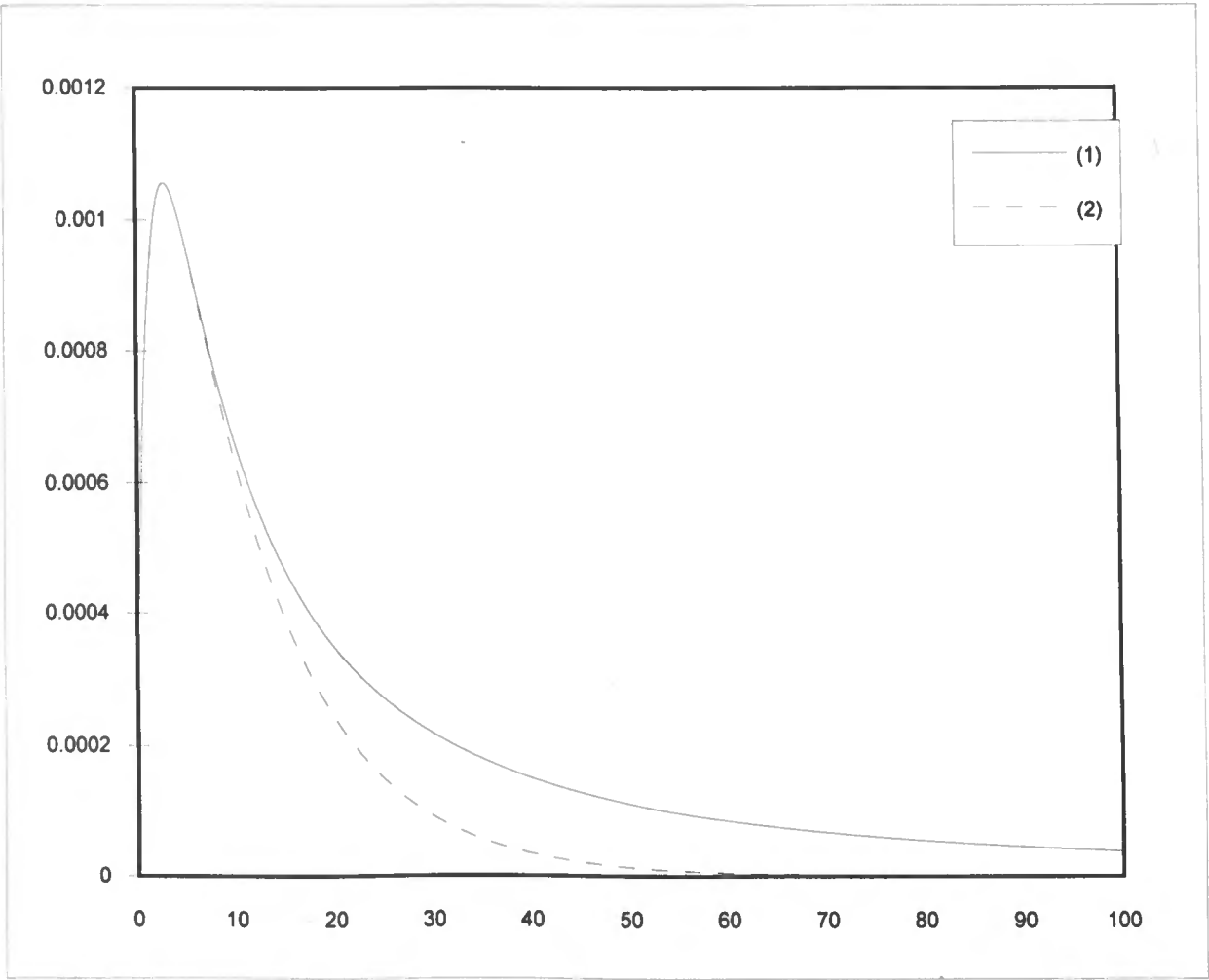


Figura 4.1:  $\phi(5, t)$  e  $\chi(5, 10, t)$ . Exponencial(1)

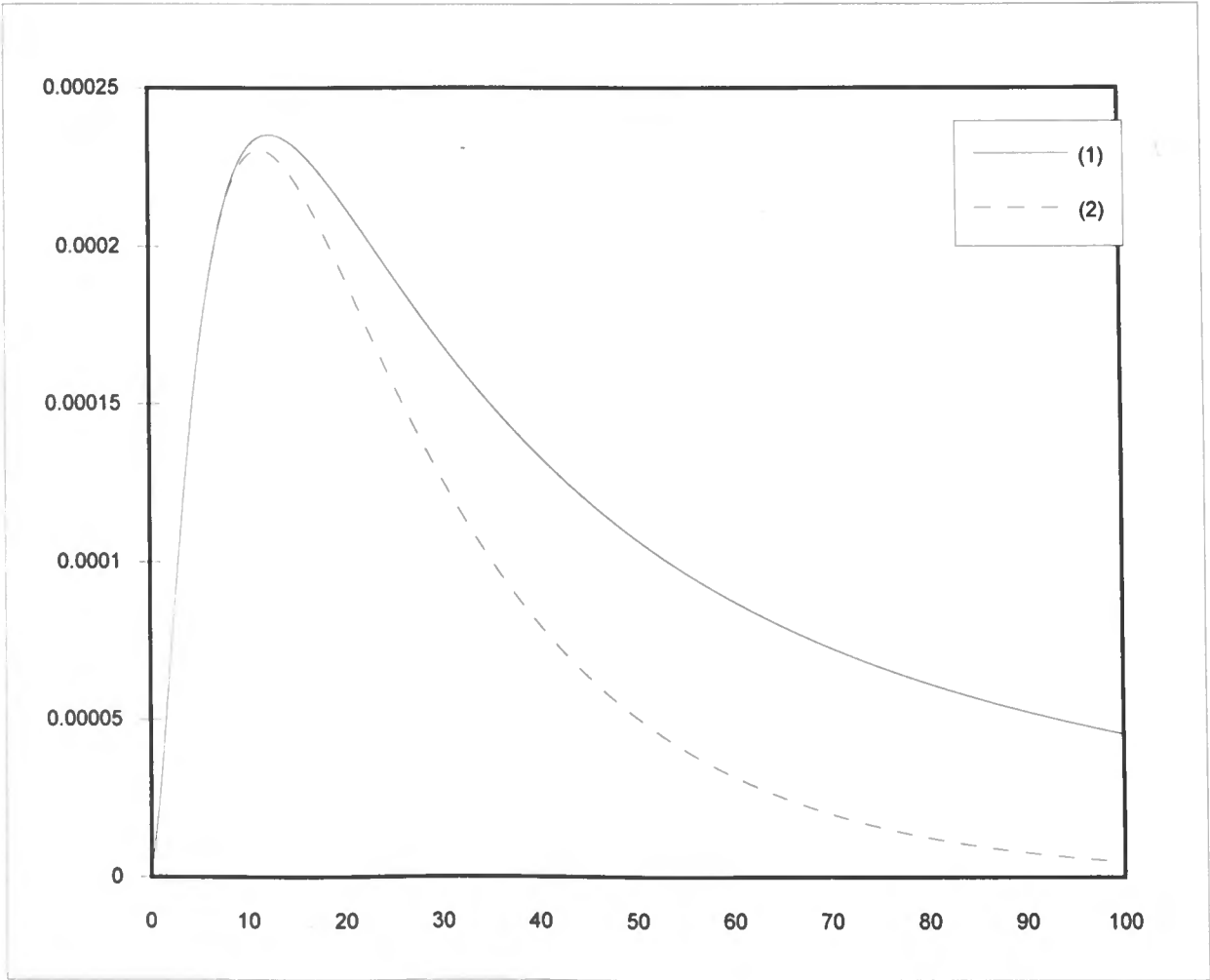


Figura 4.2:  $\phi(10, t)$  e  $\chi(10, 15, t)$ . Exponencial(1)

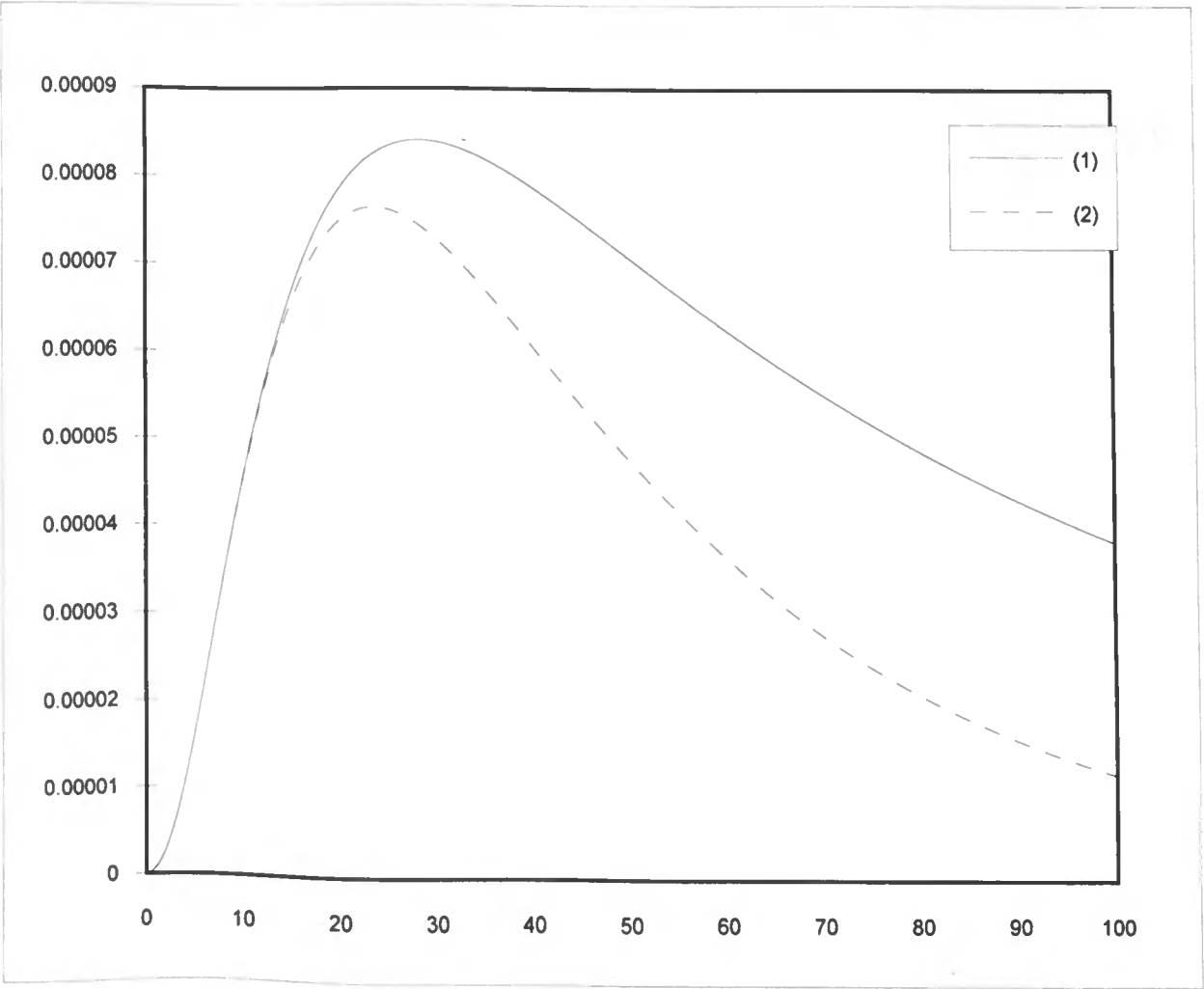


Figura 4.3:  $\phi(15,t)$  e  $\chi(15,20,t)$ . Exponencial(1)

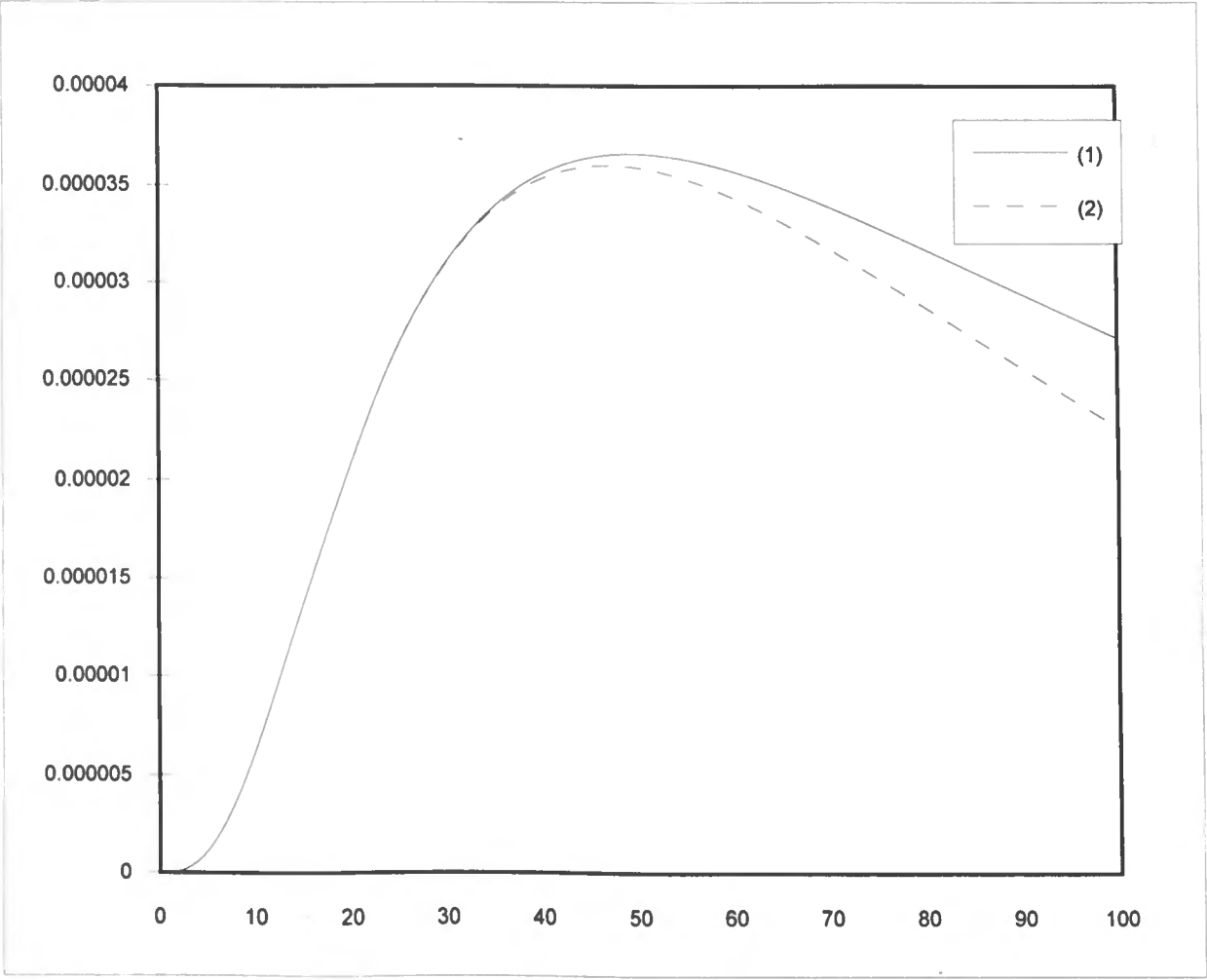


Figura 4.4:  $\phi(20, t)$  e  $\chi(20, 30, t)$ . Exponencial(1)



# Conclusão

Tendo em conta os raciocínios seguidos por Dickson e Egídio dos Reis (1996, pp. 158-159) e por Dickson e Waters (1992, p.180 e p.187), e considerando as indemnizações agregadas no fim do primeiro período de tempo, foi possível deduzir o algoritmo apresentado neste trabalho.

Para isso, também contribuiu a caracterização do processo de reserva em tempo discreto como sendo uma cadeia de Markov. Já Gerber (1979, p.17) e Cox e Miller (1977, pp. 23-24 e pp. 60-61) se tinham referido a este processo de reserva como sendo um passeio aleatório.

A redefinição do tempo de ruína sugerida por Dickson e Waters (1991), teve também um papel importante, ao permitir obter valores mais próximos da probabilidade de ruína em horizonte finito.

Relativamente aos algoritmos de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Dickson e Waters (1991), o novo método recursivo apresentado neste trabalho é mais rápido (ver Tabela 5.1), tendo em conta que o objectivo proposto é o de obter a densida-

Tabela 5.1: Comparação de tempos de processamento

densidade ( $u, t$ )	fórmulas (2.21) <sup>1</sup>	fórmulas (2.29) <sup>2</sup>	fórmulas (3.22)
(5,5)	4"	3"	2"
(10,10)	28"	18"	12"
(20,20)	3'44"	2'05"	1'29"

de da variável Tempo de Ruína, e a nível computacional é bastante manuseável requerendo o uso de menos memória, dado utilizar vectores em vez de matrizes. Além disto, este algoritmo parece ser estável, o que é uma vantagem em relação ao método de Dickson e Waters (1991). Notar, ainda, que o raciocínio base do algoritmo desenvolvido neste trabalho é o mesmo que o do método de De Vylder e Goovaerts (1988).

Para terminar, quero salientar que o trabalho efectuado foi muito interessante, até porque me possibilitou o estudo de uma área da qual possuía poucos conhecimentos, esperando, mesmo assim, ter dado algum contributo, por mais pequeno que seja. Fica ainda a sensação que mais se poderia fazer, nomeadamente na análise da função densidade da variável aleatória Tempo de Ruína considerando outras distribuições das indemnizações individuais, mas o tempo disponível para a elaboração desta dissertação não o permitiu, esperando que isso seja feito em futuros trabalhos.

<sup>1</sup> Algoritmo de Dickson e Waters.  
<sup>2</sup> Algoritmo de De Vylder e Goovaerts.

# Bibliografia

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbit, C. J. (1986), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Cox, D. R. and Miller, H. D. (1977), *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London.

De Vylder, F. and Goovaerts, M. (1988), Recursive Calculation of Finite-Time Ruin Probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, pp. 1-7.

Dickson, D. and Egídio dos Reis, A. (1996), On the Distribution of the Duration of Negative Surplus, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 148-164.

Dickson, D. and Gray, J. (1984), Approximations to Ruin Probability in the Presence of an Upper Absorbing Barrier, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 105-115

Dickson, D. and Waters, H. (1991), Recursive Calculation of Survival Probabilities, *Astin Bulletin*, 21, pp. 199-221.

Dickson, D. and Waters, H. (1992), The Probability and Severity of Ruin in Finite and Infinite Time, *Astin Bulletin*, 22, pp. 177-190.

Feller, W. (1968), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I, third edn, John Wiley & Sons, New York.

Gerber, H. U. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation For Insurance Education, University of Pennsylvania, Philadelphia.

Panjer, H. H. (1981), Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions, *Astin Bulletin*, 12, pp. 22-26.

Parzen, E. (1962), *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco.

Seal, H. L. (1978), *Survival Probabilities*, John Wiley & Sons, New York.

Sundt, B. and Jewell, W. S. (1981), Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions, *Astin Bulletin*, 12, pp. 27-39.

Sundt, B. (1992), On Some Extensions of Panjer's Class of Counting Distributions, *Astin Bulletin*, 22, pp. 61-80.